ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων

**ΘΕΟΔΩΡΑ ΡΑΒΑΝΟΥ**

# ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$ ΠΟΥ ΔΙΑΤΗΡΟΥΝ ΤΗ ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2014

Αφιερώνεται στους γονείς μου,

Βαγγελίτσα και Κώστα.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 07/03/2014 από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** | **Υπογραφή** |
|---|---|---|
| Φανή Πεταλίδου | Λέκτορας | |
| Ανδρέας Αρβανιτογεώργος | Επίκουρος Καθηγητής | |
| Χρήστος Μπαϊκούσης | Καθηγητής | |

Η έγκριση της Μεταπτυχιακής Διατριβής από το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων δεν υποδηλοί αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα (Άρθρο 202 §2, Ν. 5343/1932 και Άρθρο 50 §8, Ν.1268/1982)

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

ΘΕΟΔΩΡΑ ΡΑΒΑΝΟΥ

# Ευχαριστιες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Θεόδωρο Βλάχο για τη συνεχή επίβλεψη και καθοδήγησή που μου παρείχε όλο αυτό το διάστημα. Ευχαριστίες οφείλω στον καθηγητή κ. Χρήστο Μπαϊκούση καθώς επίσης και στα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον κ. Ανδρέα Αρβανητογεώργο και την κ. Φανή Πεταλίδου, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους στην εργασία μου.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου, τους φίλους μου και τους συναδέλφους μου, όπου με την καθημερινή τους συμπαράσταση, την υπομονή τους και την θετική τους σκέψη, συνέβαλαν στην εκπλήρωση του στόχου μου.

# Περιληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε κατά πόσο οι επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ καθορίζονται από την πρώτη θεμελιώδη μορφή και τη μέση καμπυλότητα. Ασχολούμαστε με ισομετρικές παραμορφώσεις που διατηρούν την πρώτη θεμελιώδη μορφή και τη μέση καμπυλότητα και μελετούμε τη δομή του συνόλου όλων αυτών των ισομετρικών παραμορφώσεων. Κάθε επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα, μπορεί τοπικά να παραμορφωθεί ισομετρικά διατηρώντας τη μέση καμπυλότητα και αυτός ο τρόπος παραμόρφωσης, ουσιαστικά είναι ο μοναδικός. Επιπλέον για συμπαγείς επιφάνειες γένους $g \geq 1$, αποδεικνύεται ότι δέχονται το πολύ δύο μη ισότιμες ισομετρικές εμβαπτίσεις με την ίδια μέση καμπυλότητα, εκτός αν η μέση καμπυλότητα είναι σταθερή. Στην περίπτωση που είναι τοπικά $H$-παραμορφώσιμες, τότε και μόνο τότε έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα.

# Abstract

We study the question to what extent surfaces in $\mathbb{R}^3$ are determined, up to congruences, by the first fundamental form and the mean curvature function. We deal with isometric deformations which preserve the first fundamental form and the mean curvature function. In particular, we study the structure of the moduli space of all isometric H-deformations. Every surface with constant mean curvature, can be locally and isometrically deformed preserving the mean curvature and this kind of deformation is essentially unique. Moreover, compact surfaces with genus $g \geq 1$, allow at most two non-congruent isometric immersions into $\mathbb{R}^3$, with mean curvature a given non-constant smooth function. Finally, it is proved that compact surfaces with genus $g \geq 1$ are locally H-deformable if and only if they have constant mean curvature.

# Περιεχομενα

# Εισαγωγη

Από τη θεωρία επιφανειών γνωρίζουμε ότι κάθε επιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, καθορίζεται από την πρώτη και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Στη παρούσα διατριβή θα εξετάσουμε κατά πόσον μια επιφάνεια μπορεί να καθοριστεί από την πρώτη θεμελιώδη μορφή και το ίχνος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, ή ισοδύναμα από τη μετρική και την μέση καμπυλότητα. Συγκεκριμένα, δοθείσας επιφάνειας με μέση καμπυλότητα $H$, θέλουμε να εξετάσουμε εάν υπάρχουν άλλες επιφάνειες μη ισότιμες ως προς την αρχική, με την ίδια μέση καμπυλότητα. Δύο επιφάνειες καλούνται ισότιμες, αν διαφέρουν ως προς ισομετρία του $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον θέλουμε να μελετήσουμε τη δομή του συνόλου όλων αυτών των επιφανειών. Συχνά αναφερόμενοι σε μία επιφάνεια, εννοούμε μία ισομετρική εμβάπτιση ενός 2-διάστατου, προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann στον $\mathbb{R}^3$.

Για την μελέτη και την απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων, καθοριστική θα είναι η έννοια των ισομετρικών παραμορφώσεων μιας επιφάνειας που διατηρούν τη μέση καμπυλότητα, ή αλλιώς των $H$-ισομετρικών παραμορφώσεων. Η μελέτη των $H$-ισομετρικών παραμορφώσεων των επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$, έχει μια μακρά ιστορία. Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τη μελέτη αυτή ήταν ο O. Bonnet [2] το 1867, ο οποίος απέδειξε ότι μία επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα μπορεί να παραμορφωθεί ισομετρικά διατηρώντας τη μέση καμπυλότητα. Αργότερα το 1985 ο Chern [5] μελέτησε τέτοιες παραμορφώσεις για επιφάνειες με μη σταθερή μέση καμπυλότητα, ενώ ο Scherrer [13] το 1957, οι Colares και Kenmotsu [6, 9] και οι Tribuzy και Lawson [11, 15], έδωσαν κάποιες συνθήκες για την ύπαρξη τέτοιων $H$-ισομετρικών παραμορφώσεων.

Έστω ισομετρική εμβάπτιση $f : M \to \mathbb{R}^3$ ενός προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemman διάστασης δύο στον $\mathbb{R}^3$, με μέση καμπυλότητα $H$. Μία $H$-παραμόρφωση της $f$ είναι μία συνεχής απεικόνιση $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}^3$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε θέτοντας $f_t(p) = F(t, p)$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

$(i)$ Η $f_t : M \to \mathbb{R}^3$ είναι ισομετρική εμβάπτιση, για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$(ii)$ $f_0 = f$,

$(iii)$ Η μέση καμπυλότητα της $f_t$ είναι $H$.

Μία $H$-παραμόρφωση καλείται τετριμμένη, εάν για κάθε $t$ οι $f, f_t$ είναι ισότιμες, δηλαδή υπάρχει $\tau_t$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε $f_t = \tau_t \circ f$. Στην αντίθετη περίπτωση η $H$-παραμόρφωση καλείται μη τετριμμένη, ενώ μία ισομετρική εμβάπτιση η οποία δέχεται μία μη τετριμμένη $H$-παραμόρφωση, ονομάζεται $H$-παραμορφώσιμη.

Αρχικά θα μελετήσουμε επιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα. Εξετάζουμε πρώτα απλά συνεκτικές επιφάνειες και αποδεικνύουμε ότι κάθε τέτοια επιφάνεια είναι $H$-παραμορφώσιμη. Επιπλέον αυτές είναι και οι μόνες $H$-παραμορφώσεις που δέχονται αυτές οι επιφάνειες. Έτσι διατυπώνεται το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 0.0.1.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, όπου $M$ είναι ένα απλά συνεκτικό και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο. Τότε υπάρχει μία μονοπαραμετρική, $2\pi$-περιοδική οικογένεια ισομετρικών εμβαπτίσεων (associate family) $f_\theta : M \to \mathbb{R}^3$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, με μέση καμπυλότητα $H$. Επιπλέον εάν $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^3$ είναι μία ισομετρική εμβάπτιση με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, τότε υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ και ισομετρία $\tau$ του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\tilde{f} = \tau \circ f_\theta$. Η παραμόρφωση $f_\theta$ είναι τετριμμένη αν και μόνο αν $f(M)$ είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας.*

Με άλλα λόγια το άνωθεν θεώρημα δείχνει ότι ο χώρος όλων αυτών των ισομετρικών εμβαπτίσεων με τις παραπάνω ιδιότητες, είναι ο κύκλος $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Επιπλέον στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι ελαχιστική, δηλαδή η μέση καμπυλότητα είναι μηδέν, η οικογένεια των $H$-ισομετρικών παραμορφώσεων που ορίζεται, δύναται να πάρει κάποια συγκεκριμένη μορφή. Για επιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα που δεν είναι απλά συνεκτικές, δηλαδή η θεμελιώδης ομάδα δεν είναι τετριμμένη, αποδεικνύεται με το επόμενο θεώρημα ότι το σύνολο όλων αυτών των ισομετρικών εμβαπτίσεων είναι είτε πεπερασμένο, είτε ο κύκλος $S^1$.

**Θεώρημα 0.0.2.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$ και $M$ ένα προσανατολισμένο πολύπτυγμα διάστασης δύο με μη τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα. Τότε το σύνολο όλων των ισομετρικών εμβαπτίσεων με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, είναι είτε πεπερασμένο είτε ο κύκλος $S^1$.*

Στη συνέχεια εξετάζουμε συμπαγείς επιφάνειες, οι οποίες δεν έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα και αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα, που οφείλεται στους Lawson και Tribuzy [11], σύμφωνα με το οποίο οποιαδήποτε συμπαγής επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ δέχεται το πολύ και άλλη μία, μη ισότιμη με την αρχική, ισομετρική εμβάπτιση με την ίδια μέση καμπυλότητα, εκτός και αν η μέση καμπυλότητα είναι σταθερή.

**Θεώρημα 0.0.3.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ ένα συμπαγές και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο. Εάν η μέση καμπυλότητα $H$ της $f$ δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχει το πολύ και άλλη μία ισομετρική εμβάπτιση του $M$ στον $\mathbb{R}^3$, μη ισότιμη με την $f$, με μέση καμπυλότητα $H$.*

Στην περίπτωση όμως που η επιφάνεια είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα, δηλαδή έχει γένος $g = 0$, τότε το αποτέλεσμά αυτό ενισχύεται, εφόσον δεν υφίσταται άλλη ισομετρική εμβάπτιση με την ίδια μέση καμπυλότητα.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 0.0.1, κάθε μη ολικά ομφαλική επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα είναι τοπικά $H$-παραμορφώσιμη. Το ακόλουθο αποτέλεσμα του Umehara [17], εξασφαλίζει ότι το αντίστροφο είναι αληθές για συμπαγείς επιφάνειες γένους $g \geq 1$.

**Θεώρημα 0.0.4.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ είναι ένα συμπαγές και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο με γένος $g \geq 1$. Τότε η επιφάνεια δέχεται μία μη τετριμμένη τοπική $H$-παραμόρφωση, αν και μόνο αν έχει σταθερή μέση καμπυλότητα $H$.*

Αξίζει να τονιστεί ότι ένα ερώτημα που παραμένει ανοικτό, είναι εάν υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες γένους $g \geq 1$, που να μπορούν να δεχτούν ακριβώς δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις στον $\mathbb{R}^3$, με την ίδια μέση καμπυλότητα.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων χρησιμοποιούμε εργαλεία από την Διαφορική Γεωμετρία των επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$ [7] και τη θεωρία των επιφανειών Riemann [10].

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Προκαταρκτικα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποια αλγεβρικά προκαταρκτικά και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε στοιχεία από την θεωρία των ισομετρικών εμβαπτίσεων, των χώρων κάλυψης και των επιφανειών Riemann, τα οποία είναι απαραίτητα για την απόδειξη των κύριων αποτελεσμάτων.

## 1.1 Αλγεβρικά προκαταρκτικά

Αρχικά παραθέτουμε ορισμένα βασικά στοιχεία για τους αυτοπροσηρτημένους και τους ορθογώνιους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Έστω $V$ ένας $n$-διάστατος, $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

**Ορισμός 1.1.1.** *Εάν $A : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός $A^* : V \to V$ που ορίζεται μέσω της σχέσης $\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle$, για κάθε $x, y \in V$, ονομάζεται προσηρτημένος (adjoint) του $A$.*

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες, για τυχόντες γραμμικούς μετασχηματισμούς $A, B$.

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^*,$$
$$(A^*)^* = A,$$
$$(A + B)^* = A^* + B^*,$$
$$(\lambda A)^* = \lambda A^*, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R},$$

και

$$I^* = I, \text{ όπου } I : V \to V \text{ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.}$$

Επιπλέον εάν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ο προσηρτημένος του είναι επίσης αντιστρέψιμος και μάλιστα ισχύει $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

**Ορισμός 1.1.2.** *Ο γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$, λέγεται αυτοπροσηρτημένος (self-adjoint), εάν ισχύει $A^* = A$.*

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές ενός αυτοπροσηρτημένου γραμμικού μετασχηματισμού $A$ είναι πραγματικές και ότι υπάρχει ορθομοναδιαία βάση του $V$ ως προς την οποία ο πίνακας του $A$ είναι διαγώνιος και τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι οι ιδιοτιμές του $A$.

Ένα άλλο είδος γραμμικού μετασχηματισμού που θα χρειαστούμε, είναι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί.

**Ορισμός 1.1.3.** *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$ που πληροί την ιδιότητα $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in V$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός.*

Εύκολα προκύπτει ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$ είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν ισχύει

$$A \circ A^* = A^* \circ A = I.$$

Επίσης αν ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $A$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές τότε αυτές θα είναι είτε $+1$ είτε $-1$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην έννοια της μιγαδικής δομής και της μιγαδικοποίησης ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου [4].

Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.

**Ορισμός 1.1.4.** *Ονομάζουμε μιγαδική δομή $J$ του $V$ έναν γραμμικό μετασχηματισμό $J : V \to V$, με την ιδιότητα $J \circ J = -I$.*

Σημειώνεται ότι μόνο διανυσματικοί χώροι άρτιας διάστασης μπορούν να δεχτούν μια τέτοια μιγαδική δομή.

Αν $J$ είναι μιγαδική δομή σε ένα διανυσματικό χώρο $V$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο, τότε ο $J$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, αν και μόνο αν ισχύει:

$$J^* = J^{-1} = -J.$$

Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και $J : V \to V$ μια μιγαδική δομή που είναι και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $J_\theta : V \to V$ με $J_\theta = \cos\theta I + \sin\theta J$, για τον οποίο ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} J_\theta \circ J_\phi = J_{\theta+\phi}, \ \text{για κάθε } \theta, \phi \in \mathbb{R}, \\ {J_\theta}^* = J_{-\theta}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} J_\theta \circ J_\phi &= (\cos\theta I + \sin\theta J) \circ (\cos\phi I + \sin\phi J) \\ &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)I + (\cos\theta\sin\theta + \cos\phi\sin\phi)J \\ &= \cos(\theta+\phi)I + \sin(\theta+\phi)J \\ &= J_{\theta+\phi} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} {J_\theta}^* &= (\cos\theta I + \sin\theta J)^* \\ &= \cos\theta I^* + \sin\theta J^* \\ &= \cos\theta I - \sin\theta J \\ &= J_{-\theta}. \end{aligned}$$

Προφανώς ο $J_\theta$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Έστω $V$ ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο. Εάν η μιγαδική δομή $J : V \to V$ είναι ταυτόχρονα και ορθογώνιος μετασχηματισμός, τότε η $J$ έχει μηδενικό ίχνος και από το θεώρημα Cayley-Hamilton θα ισχύει

$$J^2 - (\mathrm{tr}J)J + (\det J)I = 0.$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\det J = 1$. Ένας 2-διάστατος διανυσματικός χώρος $V$ εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο, δέχεται ακριβώς δύο τέτοιες μιγαδικές δομές που είναι και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, τις $J$ και $-J$.

**Πρόταση 1.1.5.** *Έστω $T : V \to V$ ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός με ορίζουσα $\det T = 1$, όπου $V$ είναι ένας 2-διάστατος διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και με μία μιγαδικά δομή $J$ που είναι και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Τότε υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $T = J_\theta$.*

*Απόδειξη.* Έστω $e_1$ μοναδιαίο διάνυσμα. Επειδή η $J$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός και μιγαδική δομή, η βάση $\{e_1, e_2 = Je_1\}$ είναι ορθομοναδιαία. Ο πίνακας

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

του $T$ ως προς αυτή τη βάση είναι ορθογώνιος, δηλαδή $\mathcal{T}^t = \mathcal{T}^{-1}$. Εφόσον $\det T = 1$, προκύπτει τελικά ότι

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Θεωρούμε $\theta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\alpha = \cos\theta$ και $\beta = \sin\theta$. Τότε αμέσως προκύπτει ότι $T = J_\theta$. □

Από την απόδειξη της Πρότασης 1.1.5, προκύπτει ότι το $\theta$ είναι μοναδικό $\mathrm{mod} 2\pi$.

**Πρόταση 1.1.6.** *Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = 2$, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και με μία μιγαδική δομή που είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.*

*(i) Εάν $A$ είναι ένας αυτοπροσηρτημένος μετασχηματισμός με μηδενικό ίχνος, τότε ισχύει ότι $A \circ J_\theta = J_{-\theta} \circ A$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ και ειδικά $A \circ J = -J \circ A$.*

*(ii) Εάν $A, B : V \to V$ είναι δύο αυτοπροσηρτημένοι μετασχηματισμοί με μηδενικό ίχνος και ίσες ορίζουσες, τότε υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $A = B \circ J_\theta$.*

*Απόδειξη.* (*i*) Έστω $\{e_1, e_2\}$ ορθομοναδιαία βάση τέτοια ώστε $Je_1 = e_2$. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} A \circ Je_1 &= Ae_2 \\ &= \langle Ae_2, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2\rangle e_2 \\ &= \langle Ae_1, e_2\rangle e_1 - \langle Ae_1, e_1\rangle e_2. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} -J \circ Ae_1 &= \langle -J \circ Ae_1, e_1\rangle e_1 + \langle -J \circ Ae_1, e_2\rangle e_2 \\ &= \langle Ae_1, Je_1\rangle e_1 + \langle Ae_1, Je_2\rangle e_2 \\ &= \langle Ae_1, e_2\rangle e_1 - \langle Ae_1, e_1\rangle e_2. \end{aligned}$$

Άρα από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $A \circ Je_1 = -J \circ Ae_1$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $A \circ Je_2 = -J \circ Ae_2$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$A \circ J = -J \circ A.$$

Από τον ορισμό του $J_\theta$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} J_{-\theta} \circ A &= (\cos\theta I - \sin\theta J) \circ A \\ &= \cos\theta A - \sin\theta J \circ A \\ &= \cos\theta A + \sin\theta A \circ J \\ &= A \circ (\cos\theta I + \sin\theta J) \\ &= A \circ J_\theta. \end{aligned}$$

(*ii*) Έστω ότι $\det A = \det B \neq 0$. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton για τους γραμμικούς μετασχηματισμούς $A, B$ αντίστοιχα, θα ισχύει

$$A^2 - (\mathrm{tr} A)A + (\det A)I = 0 = B^2 - (\mathrm{tr} B)B + (\det B)I.$$

Λόγω των υποθέσεων έχουμε

$$A^2 = B^2,$$

ή

$$A \circ B^{-1} = A^{-1} \circ B.$$

Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T = A \circ B^{-1}$ και παρατηρούμε ότι

$$(A \circ B^{-1})^* = (B^{-1})^* \circ A^* = B^{-1} \circ A = (A^{-1} \circ B)^{-1} = (A \circ B^{-1})^{-1}.$$

Άρα ο μετασχηματισμός $T$ είναι ορθογώνιος με ορίζουσα

$$\det T = \det A^{-1} \det B = \frac{\det B}{\det A} = 1.$$

Επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.5, υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $A \circ B^{-1} = J_\theta$, ή αλλιώς $A = B \circ J_\theta$.

Στην περίπτωση που $\det A = \det B = 0$, προκύπτει ότι $A = B = 0$ και συνεπώς η σχέση $A = B \circ J_\theta$ θα ισχύει για κάθε $\theta$. □

Κάθε $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $V$, εφοδιασμένο με μια μιγαδική δομή $J$, μπορούμε να τον δούμε ως $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο, διατηρώντας την πρόσθεση και ορίζοντας τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$zx = \kappa x + \lambda Jx,$$

όπου $z = \kappa + i\lambda \in \mathbb{C}$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $V$ με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό υπεράνω του $\mathbb{C}$, είναι ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος, ο οποίος συμβολίζεται με $V^{\mathbb{C}}$. Η μιγαδική δομή $J$ του $V$, μπορεί να επεκταθεί $\mathbb{C}$-γραμμικά σε έναν μιγαδικό ενδομορφισμό του $V^{\mathbb{C}}$.

Ο ενδομορφισμός $J : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ έχει ιδιοτιμές τις $i, -i$. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $i$ είναι

$$V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}} : JZ = iZ\}$$

και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-i$ είναι

$$V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}} : JZ = -iZ\}.$$

Είναι γνωστό ότι ο $V^{\mathbb{C}}$ μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα αυτών, δηλαδή

$$V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}.$$

**Λήμμα 1.1.7.** *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$V^{(1,0)} = \{X - iJX : X \in V\}$$

*και*

$$V^{(0,1)} = \{X + iJX : X \in V\}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $Z = X + iY$ με $X, Y \in V$. Τότε $Z \in V^{(1,0)}$, αν και μόνο αν $JZ = iZ$ ή ισοδύναμα $JX + iJY = -Y + iX$, απ′ όπου προκύπτει ότι

$$JX = -Y$$

και

$$JY = X.$$

Επομένως $Z = X + iY = X - iJX$ το οποίο συνεπάγεται ότι $V^{(1,0)} = \{X - iJX : X \in V\}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $V^{(0,1)} = \{X + iJX : X \in V\}$. □

## 1.2 Διαφορίσιμα πολυπτύγματα

**Ορισμός 1.2.1.** *Ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, που πληροί τις εξής ιδιότητες:*

*(i) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ του $M$, ώστε $\cup_{\alpha\in I}U_\alpha = M$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, όπου $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων του $M$.*

*(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικόνιση*

$$\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

*είναι $C^\infty$-διαφορίσιμη. Η οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ καλείται άτλαντας του $M$.*

*(iii) Η οικογένεια χαρτών $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, είναι μεγιστοτική, δηλαδή εάν $(U, \varphi)$ είναι ένας χάρτης τέτοιος ώστε $\varphi \circ {\varphi_\alpha}^{-1}, \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ να είναι $C^\infty$-διαφορίσιμες απεικονίσεις για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο χάρτης $(U, \varphi)$ ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.*

Το σύνολο $T_pM$ των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε ένα σημείο $p \in M$, ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του $M$ στο σημείο $p$ και δέχεται τη δομή $\mathbb{R}$-γραμμικού χώρου.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια του προσανατολισμού ενός διαφορίσιμου πολυπτύγματος $M$. Πρόκειται για μια τοπολογική έννοια η οποία αναφέρεται σε ολόκληρο το πολύπτυγμα.

**Ορισμός 1.2.2.** *Ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ καλείται προσανατολίσιμο, εάν υπάρχει άτλαντας $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, ώστε για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, να ισχύει $det d(\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1}) > 0$ στο $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, όπου $d(\phi_\alpha \circ {\phi_\beta}^{-1})$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της $\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1}$.*

Ένας άτλαντας του παραπάνω τύπου καλείται προσανατολισμός και ένας προσανατολισμός του $M$ επάγει ένα προσανατολισμό σε κάθε εφαπτόμενο χώρο. Κάθε συνεκτικό, διαφορίσιμο και προσανατολίσιμο πολύπτυγμα, δέχεται ακριβώς δύο προσανατολισμούς. Επιπλέον ένα πολύπτυγμα καλείται προσανατολισμένο, αν είναι προσανατολίσιμο και έχουμε επιλέξει ένα προσανατολισμό.

Έστω $M$ ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Η εφαπτόμενη δέσμη $TM$ του $M$, ορίζεται ως:

$$TM = \cup_{p\in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}.$$

Είναι γνωστό ότι η $TM$ είναι ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης $2n$ και η φυσική προβολή του $\pi : TM \to M$, με $\pi(p, v) = p$, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

**Ορισμός 1.2.3.** *Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $X$ του διαφορίσιμου πολυπτύγματος $M$, είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X : M \to TM$ με την ιδιότητα $\pi \circ X = I$, όπου $I$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $M$.*

Συμβολίζουμε με $\Delta(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του $M$ και με $D(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M \to \mathbb{R}$.

**Ορισμός 1.2.4.** *Μία γραμμική συνοχή στο διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$, είναι μία απεικόνιση*

$$\nabla : \Delta(M) \times \Delta(M) \to \Delta(M), \quad (X, Y) \to \nabla_X Y$$

*η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1+X_2} Y &= \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \\ \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y, \\ \nabla_X (Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \\ \nabla_X (fY) &= (Xf) Y + f \nabla_X Y, \end{aligned}$$

*για $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \Delta(M)$ και $f \in D(M)$.Το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ καλείται συναλλοίωτη παράγωγος του $Y$ στη διεύθυνση $X$, ως προς τη συνοχή $\nabla$.*

**Ορισμός 1.2.5.** *Έστω $M$ ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 1)$ στο $M$ είναι μία απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Delta(M) \times \Delta(M) \times \cdots \times \Delta(M)}_{r} \to \Delta(M)$$

*η οποία είναι $D(M)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, ενώ ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 0)$ στο $M$ είναι μία απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Delta(M) \times \Delta(M) \times \cdots \times \Delta(M)}_{r} \to D(M)$$

*η οποία είναι $D(M)$γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.*

Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \Delta(M)$ και ένα $(r, s)$-τανυστικό πεδίο $T$ του $M$.

**Ορισμός 1.2.6.** *Η συναλλοίωτη παράγωγος του $T$ στη διεύθυνση του $X$, είναι το $(r, s)$-τανυστικό πεδίο $\nabla_X T$ που ορίζεται ως:*

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(X_1, \ldots, X_r) &= \nabla_X \big( T(X_1, \ldots, X_r) \big) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, \ldots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_r), \end{aligned}$$

*όπου θέτουμε $\nabla_X T(X_1, \ldots, X_r) = X\big(T(X_1, \ldots, X_r)\big)$, εάν $s = 0$.*

**Πρόταση 1.2.7.** *Για τυχόντα τανυστικά πεδία $A, B$ τύπου $(1, 1)$ ενός πολυπτύγματος, ισχύει ότι:*

$$\nabla_X (A \circ B) = (\nabla_X A) \circ B + A \circ (\nabla_X B), \quad \text{για κάθε } X \in \Delta(M).$$

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου τανυστικών πεδίων έχουμε για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$

$$\begin{aligned}\big(\nabla_X(A\circ B)\big)(Y) &= \nabla_X\big((A\circ B)(Y)\big) - (A\circ B)(\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X A\big(B(Y)\big) - A\big(B(\nabla_X Y)\big)\\ &= (\nabla_X A)\big(B(Y)\big) + A\big(\nabla_X B(Y)\big) - A\big(B(\nabla_X Y)\big)\\ &= (\nabla_X A)\circ B(Y) + A\circ(\nabla_X B)(Y).\end{aligned}$$

□

**Ορισμός 1.2.8.** *Μία μετρική Riemann $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στο διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$, είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(2,0)$, το οποίο είναι συμμετρικό και θετικά οριστικό, δηλαδή για κάθε $X \in \Delta(M)$ και $p \in M$ ισχύει $\langle X,X\rangle(p) \geq 0$ και $\langle X,X\rangle(p) = 0$ μόνο αν $X_p = 0$.*

Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ εφοδιασμένο με μία μετρική Riemann, ονομάζεται πολύπτυγμα Riemann.

Θεωρούμε ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann $M$. Η επόμενη πρόταση εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνοχής που είναι συμβατή με τη μετρική Riemann.

**Πρόταση 1.2.9.** *Για δεδομένη μετρική $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στο πολύπτυγμα $M$, υπάρχει μία και μόνο συνοχή $\nabla$ η οποία πληροί τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$$

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

*για κάθε $X, Y, Z \in \Delta(M)$.*

Η μοναδική αυτή συνοχή $\nabla$ ονομάζεται συνοχή Levi-Civitá.

Έστω χάρτης $(U,\varphi)$ του $n$-διάστατου πολυπτύγματος $M$ με συντεταγμένες $(x^1,\ldots,x^n)$ και καμπύλη $c: I \to M$ με $c(I) \subset U$. Εφόσον τα τοπικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x^i}$ αποτελούν βάση του εφαπτόμενου χώρου σε κάθε σημείο του $U$, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R},\ \ 1 \leq i,j,k \leq n,$$

έτσι ώστε

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.2}$$

Οι συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k$, ονομάζονται σύμβολα Christoffel της συνοχής $\nabla$, ως προς τον χάρτη $(U,\varphi)$.

Επιπλέον ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{ij} \in D(U)$, με $g_{ij} = \langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle$, $1 \leq i,j \leq n$. Εάν $v \in T_pM$ τέτοιο ώστε

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

τότε η τετραγωνική μορφή

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i v^j$$

ονομάζεται πρώτη θεμελιώδης μορφή του $M$. Σημειώνουμε ότι ο $(g^{ij})$ παριστάνει τον αντίστροφο του πίνακα της πρώτης θεμελιώδους μορφής ενώ ισχύει $g_{ij} = g_{ji}$. Αποδεικνύεται η ταυτότητα του Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{km}(-g_{ij,m} + g_{jm,i} + g_{mi,j}), \tag{1.3}$$

η οποία εκφράζει τα σύμβολα Christoffel της συνοχής Levi-Civitá σε ένα χάρτη, σε σχέση με τις συνιστώσες της μετρικής και των παραγώγων των.

Στη συνέχεια για κάθε διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann $M$, με αντίστοιχη συνοχή Levi-Civitá $\nabla$, ορίζουμε τον τανυστή καμπυλότητας.

**Ορισμός 1.2.10.** *Η απεικόνιση $R : \Delta(M) \times \Delta(M) \times \Delta(M) \to \Delta(M)$ με τύπο*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

*με $X, Y, Z \in \Delta(M)$, καλείται τανυστής καμπυλότητας του πολυπτύγματος Riemann $M$.*

Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής καμπυλότητας $R$ είναι $D(M)$-γραμμικός ως προς κάθε μεταβλητή του, είναι δηλαδή ένα $(3, 1)$-τανυστικό πεδίο.

Κάθε προσανατολίσιμο, διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann $M$ δέχεται ένα τανυστικό πεδίο $J$ τύπου $(1, 1)$, το οποίο σε κάθε σημείο $p \in M$, επάγει τον γραμμικό μετασχηματισμό $J_p : T_pM \to T_pM$, ο οποίος είναι μιγαδική δομή και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Στην πραγματικότητα ο $J_p$ είναι στροφή στο $T_pM$ κατά γωνία $\pi/2$.

**Πρόταση 1.2.11.** *Ισχύει ότι $(\nabla_X J)Y = 0$ για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $(\nabla_{e_i} J)e_j = 0$, για $i, j = 1, 2$, όπου $\{e_1, e_2\}$ είναι το ορθομοναδιαίο πλαίσιο, τέτοιο ώστε $Je_1 = e_2$. Εφόσον ο $J$ είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(1, 1)$, θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\nabla_{e_1} J)(e_2) = \nabla_{e_1} J(e_2) - J(\nabla_{e_1} e_2).$$

Αφού $\{e_1, e_2\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο, θα ισχύει $\langle \nabla_{e_1} e_1, e_1\rangle = 0$ και $\langle \nabla_{e_1} e_2, e_2\rangle = 0$. Έχουμε

$$-\langle J(\nabla_{e_1} e_2), e_1\rangle = 0,$$

ή

$$\langle \nabla_{e_1} J(e_2) - (\nabla_{e_1} J)(e_2), e_1\rangle = 0,$$

ή

$$-\langle \nabla_{e_1} e_1, e_1\rangle - \langle (\nabla_{e_1} J)(e_2), e_1\rangle = 0.$$

Οπότε παίρνουμε $\langle(\nabla_{e_1}J)(e_2), e_1\rangle = 0$.

Επιπλέον ισχύει

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle &= -\langle e_1, \nabla_{e_1}e_2\rangle \\ &= \langle Je_2, \nabla_{e_1}e_2\rangle \\ &= -\langle e_2, J(\nabla_{e_1}e_2)\rangle \\ &= -\langle e_2, \nabla_{e_1}J(e_2)\rangle + \langle e_2, (\nabla_{e_1}J)e_2\rangle,\end{aligned}$$

απ′ όπου λαμβάνουμε

$$\langle e_2, (\nabla_{e_1}J)e_2\rangle = 0.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $(\nabla_{e_1}J)e_2 = (\nabla_{e_1}J)e_1 = (\nabla_{e_2}J)e_2 = 0$. Άρα καταλήγουμε στο ότι

$$(\nabla_X J)Y = 0, \text{ για κάθε } X, Y \in \Delta(M^2).$$

□

## 1.3 Ισομετρικές εμβαπτίσεις στον $\mathbb{R}^3$

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε ισομετρικές εμβαπτίσεις ενός 2-διάστατου πολυπτύγματος $M$ στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική.

**Ορισμός 1.3.1.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία διαφορίσιμη απεικόνιση. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $f$, είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση $V : M \to \mathbb{R}^3$, η οποία σε κάθε $p \in M$, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $V_p \in T_{f(p)}\mathbb{R}^3$.*

Για κάθε $X \in \Delta(M)$, ορίζεται ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $f$, το οποίο συμβολίζεται με $df(X)$ και το οποίο στο τυχόν σημείο $p \in M$ λαμβάνει την τιμή $df_p(X_p)$.

Συμβολίζουμε με $\Delta(f)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της $f$.

**Πρόταση 1.3.2.** *Εάν $f : M \to \mathbb{R}^3$ είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση και $\overline{\nabla}$ είναι η συνοχή Levi-Civitá του $\mathbb{R}^3$, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση*

$$\nabla^f : \Delta(M) \times \Delta(f) \to \Delta(f), \quad (X, V) \to \nabla^f_X V,$$

*η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\nabla^f_{X_1+X_2}V = \nabla^f_{X_1}V + \nabla^f_{X_2}V,$$
$$\nabla^f_{uX}V = u\nabla^f_X V,$$
$$\nabla^f_X(V_1 + V_2) = \nabla^f_X V_1 + \nabla^f_X V_2,$$

$$\nabla^f_X(uV) = (Xu)V + u\nabla^f_X V,$$
$$\nabla^f_X(\overline{Y} \circ f) = \overline{\nabla}_{df(X)}\overline{Y},$$
$$\nabla^f_X df(Y) - \nabla^f_Y df(X) = df([X,Y]),$$
$$X(\langle V_1, V_2\rangle) = \langle \nabla^f_X V_1, V_2\rangle + \langle V_1, \nabla^f_X V_2\rangle$$

*για* $X, Y, X_1, X_2 \in \Delta(M)$, $\overline{Y} \in \Delta(\mathbb{R}^3)$, $V_1, V_2, V \in \Delta(f)$ *και* $u \in D(M)$.

Από εδώ και στο εξής, για να απλουστεύσουμε το συμβολισμό θα γράφουμε $\nabla^f = \overline{\nabla}$.

**Ορισμός 1.3.3.** *Έστω $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένα 2-διάστατο πολύπτυγμα Riemann. Μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}^3$ καλείται ισομετρική εμβάπτιση εάν για κάθε $p \in M$ ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το διαφορικό $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1,*

(ii) *$\langle df_p(v), df_p(w)\rangle_{f(p)} = \langle v, w\rangle_p$, για κάθε $v, w \in T_pM$.*

Έστω ισομετρική εμβάπτιση $f : (M, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to \mathbb{R}^3$. Για κάθε $p \in M$ ο εφαπτόμενος χώρος $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ αναλύεται σε ορθογώνιο ευθύ άθροισμα

$$T_{f(p)}\mathbb{R}^3 = df_p(T_pM) \oplus (df_p(T_pM))^\perp,$$

όπου $(df_p(T_pM))^\perp$ είναι το ορθοσυμπλήρωμα του 2-διάστατου υποχώρου $df_p(T_pM)$, στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$. Ο $(df_p(T_pM))^\perp$ καλείται κάθετος χώρος της $f$ στο σημείο $p$ και συμβολίζεται με $T_p^\perp f$.

Ένα διαφορίσιμο κάθετο διανυσματικό πεδίο της $f$, είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση $\xi$, τέτοια ώστε για τυχόν σημείο $p \in M$, να ισχύει $\xi_p \in T_p^\perp f$. Συμβολίζουμε με $\Delta^\perp(f)$ το σύνολο των κάθετων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων της $f$. Είναι γνωστό ότι το $M$ είναι προσανατολίσιμο μόνο εάν υπάρχει μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi$ της $f$.

Κάθε διάνυσμα $v \in T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ αναλύεται μονοσήμαντα ως $v = df_p(v^\top) + v^\perp$ με $v^\top \in T_pM$ και $v^\perp \in T_p^\perp f$. Κατά συνέπεια για κάθε $X \in \Delta(f)$, υπάρχουν διανυσματικά πεδία $X^\top \in \Delta(M)$ και $X^\perp \in \Delta^\perp(f)$, ώστε

$$X = df(X^\top) + X^\perp.$$

Έτσι για $X, Y \in \Delta(M)$ θα έχουμε την ανάλυση:

$$\overline{\nabla}_X df(Y) = df\Big((\overline{\nabla}_X df(Y))^\top\Big) + \Big(\overline{\nabla}_X df(Y)\Big)^\perp \tag{1.4}$$

με $(\overline{\nabla}_X df(Y))^\top \in \Delta(M)$ και $\Big(\overline{\nabla}_X df(Y)\Big)^\perp \in \Delta^\perp(f)$.

Αποδεικνύεται ότι $(\overline{\nabla}_X df(Y))^\top = \nabla_X Y$, όπου $\nabla$ είναι η συνοχή Levi-Civitá του $M$.

Ορίζουμε στη συνέχεια τη διγραμμική και συμμετρική απεικόνιση

$$B : \Delta(M) \times \Delta(M) \to \Delta^{\perp}(f)$$

$$(X, Y) \to B(X, Y) := \Big(\overline{\nabla}_X df(Y)\Big)^{\perp}.$$

Η $B$ ονομάζεται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της εμβάπτισης $f$. Έτσι η προαναφερθείσα σχέση (1.4), παίρνει σύμφωνα με τα παραπάνω τη μορφή

$$\overline{\nabla}_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + B(X, Y)$$

και καλείται τύπος του Gauss.

Για $X \in \Delta(M)$ και $\xi \in \Delta^{\perp}(f)$ με $|\xi| = 1$, ισχύει

$$\overline{\nabla}_X \xi = df\Big((\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}\Big) \tag{1.5}$$

με $(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top} \in \Delta(M)$.

Ορίζουμε επίσης το τανυστικό πεδίο $A_\xi$ τύπου $(1, 1)$, ως εξής:

$$A_\xi : \Delta(M) \to \Delta(M)$$

$$X \to A_\xi X := -(\nabla_X \xi)^{\top},$$

ώστε να ισχύει ταυτοτικά

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle B(X, Y), \xi\rangle.$$

Το συμμετρικό τανυστικό πεδίο $II$ τύπου $(2, 0)$, με $II(X, Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle$, καλείται δεύτερη θεμελιώδης μορφή στη διεύθυνση του $\xi$. Το τανυστικό πεδίο $A_\xi$ ονομάζεται τελεστής $Weingarten$ ή τελεστής σχήματος της $f$ ως προς τη διεύθυνση του $\xi$ και από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $A_\xi = A$.

Είναι γνωστό ότι ο $A$ είναι ένας αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός. Οι ιδιοτιμές $\kappa_1 \geq \kappa_2$ ονομάζονται κύριες καμπυλότητες της $f$, ενώ τα αντίστοιχα διανύσματα ονομάζονται κύριες διευθύνσεις της $f$ σε ένα σημείο $p$ του πολυπτύγματος. Το σημείο αυτό ονομάζεται ομφαλικό εάν $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

Η μέση καμπυλότητα $H$ είναι εξ ορισμού η συνάρτηση

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\mathrm{tr}A}{2}$$

και η καμπυλότητα Gauss $K$ η συνάρτηση

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det A.$$

Έστω χάρτης $(U, \varphi)$ του 2-διάστατου πολυπτύγματος $M$, με συντεταγμένες $(x^1, x^2)$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$E = \langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\rangle,$$

$$F = \langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} \rangle,$$
$$G = \langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \rangle,$$

οι οποίες ονομάζονται θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης.

Επιπλέον ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$L = II(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}),$$
$$M = II(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}) = II(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}),$$
$$N = II(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}),$$

οι οποίες ονομάζονται θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης.

Είναι γνωστό ότι η μέση καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$H = \frac{LG - 2FM + NE}{EG - F^2},$$

ενώ η καμπυλότητα Gauss από τον τύπο

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

**Ορισμός 1.3.4.** *Μία ισομετρική εμβάπτιση ονομάζεται ελαχιστική εάν ισχύει* $H = 0$.

Για κάθε ισομετρική εμβάπτιση $f : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to \mathbb{R}^3$ ισχύουν οι εξισώσεις

$$R(X, Y)Z = \langle AY, Z \rangle X - \langle AX, Z \rangle Y,$$
$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X,$$

για $X, Y, Z \in \Delta(M)$, οι οποίες είναι γνωστές ως εξίσωση Gauss και εξίσωση Codazzi αντίστοιχα.

**Ορισμός 1.3.5.** *Δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις* $f, g : M \to \mathbb{R}^3$ *καλούνται ισότιμες (congruent), εάν υπάρχει μία ισομετρία* $\tau$ *του* $\mathbb{R}^3$*, τέτοια ώστε* $g = \tau \circ f$.

Ακολουθεί ένα βασικό θεώρημα της θεωρίας των ισομετρικών εμβαπτίσεων, το λεγόμενο θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου των επιφανειών

**Θεώρημα 1.3.6.** *(i)(Υπαρξη): Έστω* $M$ *ένα απλά συνεκτικό, 2-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann, με συνοχή Levi-Civita* $\nabla$*, τανυστή καμπυλότητας* $R$ *και* $A$ *ένα αυτοπροσηρτημένο τανυστικό πεδίο τύπου* $(1,1)$*. Εάν το* $A$ *ικανοποιεί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi, τότε υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση* $f : M \to \mathbb{R}^3$ *με τελεστή σχήματος* $A$.

*(ii)(Μοναδικότητα): Έστω* $f, g : M \to \mathbb{R}^3$ *δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις όπου* $M$ *είναι ένα 2-διάστατο πολυπτύγμα Riemann. Εάν έχουν τον ίδιο τελεστή σχήματος, τότε υπάρχει* $\tau$ *ισομετρία του* $\mathbb{R}^3$ *τέτοια ώστε* $g = \tau \circ f$.

**Ορισμός 1.3.7.** *Μία ισομετρική εμβάπτιση $f : M \to \mathbb{R}^3$ καλείται άκαμπτη (rigid), εάν κάθε άλλη ισομετρική εμβάπτιση $g : M \to \mathbb{R}^3$ είναι ισότιμη της $f$. Δηλαδή είναι της μορφής $g = \tau \circ f$, όπου $\tau$ είναι μια ισομετρία του $\mathbb{R}^3$.*

Έστω $f : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\xi$ και τελεστή σχήματος $A$. Θεωρούμε μία ισομετρία $\tau$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $\tau(x) = Lx + \alpha$, με $\alpha$ ένα σταθερό διάνυσμα και $L$ έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση

$$g = \tau \circ f \colon (M^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to \mathbb{R}^3,$$

είναι ισομετρική εμβάπτιση, με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $L\xi$ και αντίστοιχο τελεστή σχήματος $A$.

## 1.4 Χώροι κάλυψης

**Ορισμός 1.4.1.** *Έστω $M$ και $\widetilde{M}$ δύο συνεκτικά διαφορίσιμα πολυπτύγματα και $\pi : \widetilde{M} \to M$ μία διαφορίσιμη απεικόνιση. Η $\pi$ καλείται απεικόνιση κάλυψης, εάν $\pi(\widetilde{M}) = M$ και κάθε σημείο $p \in M$ έχει μία περιοχή $U \subset M$ τέτοια ώστε*

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in I} V_\alpha,$$

*όπου $V_\alpha$ είναι ανοικτά, συνεκτικά και ξένα μεταξύ τους ανά δύο και $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ είναι διαφορομορφισμός, για κάθε $\alpha \in I$.*

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές έννοιες από την τοπολογία [12], όπως οι ομοτοπίες και η πρωταρχική ομάδα. Έστω $X, Y$ δύο τοπολογικοί χώροι και $I = [0, 1]$.

**Ορισμός 1.4.2.** *Δύο απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ καλούνται ομοτοπικές, εάν υπάρχει μία απεικόνιση*

$$F : X \times I \to Y,$$

*με $F(x, 0) = f(x)$ και $F(x, 1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $f \simeq g$ και θα ονομάζουμε την $F$, ομοτοπία της $f$ με την $g$.*

**Ορισμός 1.4.3.** *Έστω τα σημεία $y_0, y_1 \in Y$. Μία τροχιά στον χώρο $Y$ από το $y_0$ στο $y_1$, είναι μία συνεχής απεικόνιση $f : I \to Y$ με $f(0) = y_0$ και $f(1) = y_1$. Δύο τροχιές $f, g : I \to Y$ από το $y_0$ στο $y_1$ ονομάζονται τροχιακά ομοτοπικές, εάν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση*

$$F : I \times I \to Y$$

*με $F(s, 0) = f(s)$ , $F(s, 1) = g(s)$, για κάθε $s \in I$ και $F(0, t) = y_0$ , $F(1, t) = y_1$ για κάθε $t \in I$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $f \simeq_p g$ και θα ονομάζουμε την $F$ τροχιακή ομοτοπία της $f$ με την $g$.*

Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις $\simeq$ και $\simeq_p$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

**Ορισμός 1.4.4.** *Έστω η τροχιά $f : I \to X$ από το σημείο $x_0$ στο $x_1$ και η τροχιά $g : I \to X$ από το σημείο $x_1$ στο $x_2$. Τότε ορίζεται το γινόμενο $f * g : I \to X$ να είναι η τροχιά*

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & , \ s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Η $f * g$ είναι συνεχής και ενώνει το σημείο $x_0$ με το $x_2$.

Εάν $f : I \to Y$ είναι μία τροχιά, τότε θα συμβολίζουμε με $[f]$ την κλάση τροχιακής ομοτοπίας της $f$.

Έστω $M$ ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα και τυχόν σημείο $p \in M$. Τότε μία συνεχής τροχιά $\gamma : [0, 1] \to M$, με $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, ονομάζεται θηλιά με βασικό σημείο το $p$. Θεωρούμε $\pi_1(M, p)$ το σύνολο των τροχιακά ομοτοπικών κλάσεων των θηλιών με βασικό σημείο το $p$. Για $[f], [g] \in \pi_1(M, p)$, ορίζουμε $[f] * [g] = [f * g]$. Αποδεικνύεται ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη και ότι το σύνολο $\pi_1(M, p)$ με αυτή την πράξη, αποτελεί μια ομάδα η οποία καλείται πρωταρχική ομάδα του $M$, με βασικό σημείο το $p$.

Είναι γνωστό ότι για τυχαία σημεία $p, q \in M$, οι ομάδες $\pi_1(M, p)$ και $\pi_1(M, q)$ είναι ισόμορφες κι έτσι θα κάνουμε λόγο για την πρωταρχική ομάδα $\pi_1(M)$. Επιπλέον ομοιομορφικά πολυπτύγματα, έχουν την ίδια πρωταρχική ομάδα.

Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ καλείται απλά συνεκτικό όταν είναι τροχιακά συνεκτικό και έχει τετριμμένη πρωταρχική ομάδα, δηλαδή $\pi_1(M) = \{1\}$.

Ένα βασικό θεώρημα είναι το ακόλουθο:

**Θεώρημα 1.4.5.** *Έστω $M$ ένα συνεκτικό πολύπτυγμα.*

*(i) Υπάρχει ένας απλά συνεκτικός χώρος κάλυψης $(\widetilde{M}, \pi)$ του $M$.*

*(ii) Εάν $(\widetilde{M'}, \pi')$ είναι ένας άλλος απλά συνεκτικός χώρος καλύψεως του $M$, τότε υπάρχει διαφορομορφισμός $f : \widetilde{M} \to \widetilde{M'}$, που ικανοποιεί τη σχέση $\pi' \circ f = \pi$.*

*(iii) Εάν το $M$ είναι απλά συνεκτικό και $(\widetilde{M}, \pi)$ ένας χώρος κάλυψης του $M$, τότε η απεικόνιση καλύψεως $\pi$ είναι διαφορομορφισμός.*

Ο μοναδικός απλά συνεκτικός χώρος κάλυψης του $M$, καλείται καθολικός χώρος κάλυψης.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στην έννοια του μετασχηματισμού στρωμάτων, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη κάποιων βασικών αποτελεσμάτων στο επόμενο κεφάλαιο.

**Ορισμός 1.4.6.** *Έστω $\pi : \widetilde{M} \to M$ μία απεικόνιση κάλυψης. Ένας διαφορομορφισμός $\phi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ με την ιδιότητα $\pi \circ \phi = \pi$, καλείται μετασχηματισμός στρωμάτων του $\widetilde{M}$.*

Εάν θεωρήσουμε ένα σημείο $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, τότε $\phi(\tilde{p}) \in \pi^{-1}(p)$, και η δράση της $\phi$ είναι μία μετάθεση των στρωμάτων της κάλυψης.

Το σύνολο των μετασχηματισμών στρωμάτων του $M$ με πράξη τη σύνθεση, αποτελούν ομάδα η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{D}$.

## 1.5 Επιφάνειες Riemann

**Ορισμός 1.5.1.** *Μία επιφάνεια Riemann $M$, είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, ο οποίος ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

*(i) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ του $M$, ώστε $\cup_{\alpha\in I}U_\alpha = M$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$, όπου $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται μιγαδικός χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων του $M$.*

*(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ η μιγαδική συνάρτηση $\varphi_\alpha \circ {\phi_\beta}^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C} \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.*

*(iii) Η οικογένεια μιγαδικών χαρτών $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, είναι μεγιστοτική, δηλαδή εάν $(U, \varphi)$ είναι ένας μιγαδικός χάρτης τέτοιος ώστε $\varphi \circ {\varphi_\alpha}^{-1}, \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ να είναι ολόμορφες για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο $(U, \varphi)$ ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.*

Μία οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ που πληροί μόνο τις ιδιότητες $(i)$ και $(ii)$ καλείται μιγαδικός άτλαντας του $M$, ενώ αν πληρεί και την $(iii)$ καλείται μιγαδική δομή του $M$.

Έστω $W$ ένα ανοικτό υποσύνολο μιας επιφάνειας Riemann $M$.

**Ορισμός 1.5.2.** *Μία συνάρτηση $f : W \to \mathbb{C}$, λέγεται ολόμορφη, αν για κάθε χάρτη $\varphi : U \to \mathbb{C}$ του $M$, με $U \cap W \neq \emptyset$, η συνάρτηση $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη επί του ανοικτού συνόλου $\varphi(U \cap W) \subset \mathbb{C}$.*

**Πρόταση 1.5.3.** *Κάθε επιφάνεια Riemann είναι ένα προσανατολίσιμο πολύπτυγμα διάστασης δύο.*

*Απόδειξη.* Έστω $M$ μία επιφάνεια Riemann και $(U, \phi), (V, \psi)$ δύο χάρτες του $M$ με συντεταγμένες $(x, y), (u, v)$ αντίστοιχα και $U \cap V \neq \varnothing$. Από τον ορισμό της επιφάνειας Riemann, γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, με $\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$, είναι ολόμορφη. Δηλαδή είναι διαφορίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα της $\psi \circ \phi^{-1}$, είναι $\det d(\psi \circ \phi^{-1}) = u_x^2 + u_y^2$, που είναι πάντα θετική. Επομένως το $M$ είναι προσανατολίσιμο. □

Θεωρούμε ένα 2-διάστατο πολύπτυγμα Riemann $M$ και $(U, \varphi)$ ένα χάρτη γύρω από ένα σημείο $p$ του πολυπτύγματος, με συντεταγμένες $(x, y)$. Σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα του Chern [3], γύρω από κάθε σημείο $p$ ενός πολυπτύγματος υπάρχει ένα σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων $(x, y)$, δηλαδή η μετρική του θα είναι $\langle\cdot,\cdot\rangle = E(dx^2 + dy^2)$ με $E \in D(U)$ και $E > 0$.

**Πρόταση 1.5.4.** *Κάθε προσανατολισμένο 2-διάστατο πολύπτυγμα γίνεται κατά φυσικό τρόπο επιφάνεια Riemann.*

*Απόδειξη.* Έστω $M$ ένα προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης 2. Εφοδιάζουμε το $M$ με μία μετρική Riemann $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Chern [3], γύρω από κάθε σημείο του πολυπτύγματος, υπάρχει ένα σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων. Παίρνουμε λοιπόν ένα σημείο $p \in M$ και θεωρούμε γύρω από αυτό χάρτες $(U, \varphi)$ και $(V, \psi)$ του ίδιου προσανατολισμού με συντεταγμένες $(x, y)$ και $(u, v)$ αντίστοιχα, ώστε

$$\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle = 0, \langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle = E, \tag{1.6}$$

$$\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\rangle = 0, \langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\rangle = \tilde{E}. \tag{1.7}$$

Στο ανοικτό και μη κενό σύνολο $U \cap V$ ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}$$

Επομένως από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\\ (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 &= \frac{E}{\tilde{E}},\\ (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 &= \frac{E}{\tilde{E}}.\end{aligned}$$

Εφόσον οι χάρτες $(U, \varphi)$ και $(V, \psi)$ ανήκουν στον ίδιο προσανατολισμό, η απεικόνιση $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ έχει θετική Ιακωβιανή ορίζουσα. Δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} > 0.$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $u_x = v_y$ και $u_y = v_x$. Αυτό σημαίνει ότι η προαναφερθείσα απεικόνιση ικανοποιεί τις εξισώσεις Caushy-Riemann, δηλαδή $\psi \circ \varphi^{-1}$ είναι ολόμορφη και επομένως το $M$ καθίσταται επιφάνεια Riemann. □

Από εδώ και στο εξής όταν θα αναφερόμαστε σε έναν μιγαδικό χάρτη $(U, z)$ με μιγαδική συντεταγμένη $z = x+iy$, θα ενοούμε έναν χάρτη $(U, \phi)$ του ίδιου προσανατολισμού του $M$, με συντεταγμένες $(x, y)$ έτσι ώστε $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0, \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = E$, ή αλλιώς $\langle \cdot, \cdot \rangle = E(dx^2 + dy^2)$.

Για κάθε προσανατολίσιμο πολύπτυγμα Riemann $M$, ορίζεται ένα $(1, 1)$-τανυστικό πεδίο $J : \Delta(M) \to \Delta(M)$, τέτοιο ώστε για κάθε σημείο $p \in M$,το $J_p : T_pM \to T_pM$ είναι η στροφή κατά γωνία $\pi/2$. Το $(1, 1)$-τανυστικό πεδίο $J$ καλείται μιγαδική δομή του $M$. Στο εξής αναφερόμενοι σε μια επιφάνεια Riemann, θα ενοούμε ένα ζεύγος $(M, J)$, αποτελούμενο από ένα συνεκτικό και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο, μαζί με μία μιγαδική δομή $J$ επ′ αυτού.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην ενότητα 1.1, ο εφαπτόμενος χώρος γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$, ορίζοντας τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$(\lambda + i\mu)v = \lambda v + \mu J v,$$

για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $v \in T_pM$. Έτσι ορίζεται ο $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $T_pM^{\mathbb{C}}$.

Ακόμη επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά τη μιγαδική δομή $J$ στο $T_pM^{\mathbb{C}}$. Δηλαδή έχουμε πλέον μία απεικόνιση

$$J_p : T_pM^{\mathbb{C}} \to T_pM^{\mathbb{C}}$$

έτσι ώστε

$$J(v + iw) = Jv + iJw.$$

Η μιγαδική δομή $J$, έχει ιδιοτιμές τις $i, -i$. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $i$ είναι

$$T_pM^{(1,0)} = \{v \in T_pM^{\mathbb{C}} : Jv = iv\}$$

και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-i$ είναι

$$T_pM^{(0,1)} = \{v \in T_pM^{\mathbb{C}} : Jv = -iv\}.$$

Σε κάθε σημείο του $M$ ισχύει:

$$T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM^{(1,0)} \oplus T_pM^{(0,1)}.$$

Η μιγαδικοποιημένη εφαπτόμενη δέσμη συμβολίζεται με $TM^{\mathbb{C}}$ και διασπάται ως εξής $TM^{\mathbb{C}} = TM^{(1,0)} \oplus TM^{(0,1)}$. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων της συμβολίζεται με $\Gamma(TM^{\mathbb{C}})$ και το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M \to \mathbb{C}$, το παριστάνουμε με $C^\infty(M, \mathbb{C})$.

**Ορισμός 1.5.5.** *Ένα μιγαδικό τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 1)$ στο $M$ είναι μία απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \cdots \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}})}_{r} \to \Gamma(TM^{\mathbb{C}})$$

*η οποία είναι $C^\infty(M, \mathbb{C})$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, ενώ ένα μιγαδικό τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 0)$ στο $M$ είναι μία απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \cdots \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}})}_{r} \to C^\infty(M, \mathbb{C})$$

*η οποία είναι $C^\infty(M,\mathbb{C})$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.*

Ορίζοντας τις προβολές

$$\pi' : TM^{\mathbb{C}} \to TM^{(1,0)}, \text{ με } \pi'(w) = \frac{1}{2}(w - iJw),$$

και

$$\pi'' : TM^{\mathbb{C}} \to TM^{(0,1)}, \text{ με } \pi''(w) = \frac{1}{2}(w + iJw),$$

κάθε $w \in T_pM^{\mathbb{C}}$ θα γράφεται ως $w = \pi'(w) + \pi''(w)$.

Άρα για κάθε μιγαδικό τανυστικό πεδίο $\Phi$ τύπου $(2,0)$ και τυχαία διανύσματα $v, w \in T_pM^{\mathbb{C}}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(v,w) &= \Phi\big(\pi'(v) + \pi''(v), \pi'(w) + \pi''(w)\big)\\ &= \Phi\big(\pi'(v), \pi'(w)\big) + \Phi\big(\pi'(v), \pi''(w)\big)\\ &\quad +\Phi\big(\pi''(v), \pi'(w)\big) + \Phi\big(\pi''(v), \pi''(w)\big),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi = \Phi^{(2,0)} + \Phi^{(1,1)} + \Phi^{(0,2)},$$

όπου $\Phi^{(2,0)}, \Phi^{(1,1)}$ και $\Phi^{(0,2)}$ είναι τανυστικά πεδία τύπου $(2,0)$, που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2,0)}(v,w) &= \Phi\big(\pi'(v), \pi'(w)\big),\\ \Phi^{(1,1)}(v,w) &= \Phi\big(\pi'(v), \pi''(w)\big) + \Phi\big(\pi''(v), \pi'(w)\big),\\ \Phi^{(0,2)}(v,w) &= \Phi\big(\pi''(v), \pi''(w)\big).\end{aligned}$$

**Ορισμός 1.5.6.** *Έστω $T, \Sigma$ δύο μιγαδικά τανυστικά πεδία τύπου $(r,0), (s,0)$ αντίστοιχα. Το τανυστικό γινόμενο $T\otimes\Sigma$ των $T, \Sigma$ είναι το μιγαδικό τανυστικό πεδίο τύπου $(r+s, 0)$*

$$T \otimes \Sigma : \underbrace{\Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \cdots \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}})}_{r+s} \to C^\infty(M,\mathbb{C})$$

*με*

$$T \otimes \Sigma(X_1, \ldots, X_{r+s}) = T(X_1, \ldots, X_r)\Sigma(X_{r+1}, \ldots, X_s).$$

Έστω $M$ ένα προσανατολισμένο πολύπτυγμα και $(U, z)$ ένας μιγαδικός χάρτης επ' αυτού με μιγαδική συντεταγμένη $z = x + iy$. Στο $U$ ορίζονται τα $(1,0)$-τανυστικά πεδία $dx, dy : \Delta(U) \to D(U)$ τα οποία μπορούμε να τα επεκτείνουμε πάνω από το $\mathbb{C}$, ώστε $dx, dy : \Gamma(TU) \to C^\infty(U,\mathbb{C})$.

Στη συνέχεια ορίζουμε το $(1,0)$-τανυστικό πεδίο $dz : \Gamma(TU^{\mathbb{C}}) \to C^\infty(U,\mathbb{C})$, με $dz = dx + idy$ καθώς επίσης και το συζυγές του $d\bar{z} : \Gamma(TU^{\mathbb{C}}) \to C^\infty(U,\mathbb{C})$, με $d\bar{z} = dx - idy$.

Οι τελεστές Wirtinger είναι οι

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$

και

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Προφανώς ισχύουν τα εξής:

$$dz\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big) = 1,\ \ dz\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big) = 0,\ \ d\bar{z}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big) = 0 \ \text{ και } \ d\bar{z}\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big) = 1.$$

Τα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_p$, αποτελούν βάση του $T_pM^{\mathbb{C}}$, ενώ είναι εμφανές ότι

$$\frac{\partial}{\partial z}\ |_p \in T_p^{(1,0)}M,$$

και

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ |_p \in T_p^{(0,1)}M.$$

Κάθε $(1,0)$ μιγαδικό τανυστικό πεδίο $\Phi$ γράφεται ως

$$\Phi = \Phi^{(1,0)} + \Phi^{(0,1)},$$

όπου

$$\Phi^{(1,0)} = \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)dz \ \text{ και } \ \Phi^{(0,1)} = \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big)d\bar{z},$$

ενώ κάθε $(2,0)$ μιγαδικό τανυστικό πεδίο $\Phi$ γράφεται ως

$$\Phi = \Phi^{(2,0)} + \Phi^{(1,1)} + \Phi^{(0,2)},$$

όπου

$$\Phi^{(2,0)} = \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)dz \otimes dz,$$
$$\Phi^{(1,1)} = \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big)dz \otimes d\bar{z} + \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)d\bar{z} \otimes dz,$$
$$\Phi^{(0,2)} = \Phi\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big)d\bar{z} \otimes d\bar{z}.$$

Εάν $(U, z)$ ένας μιγαδικός χάρτης με μιγαδική συντεταγμένη $z$ και $f : U \to \mathbb{C}$ μια μιγαδική συνάρτηση, τότε κάθε μιγαδικό τανυστικό πεδίο $\Phi$ τύπου $(r, 0)$ που είναι της μορφής

$$\Phi = f(z)\underbrace{dz \otimes .... \otimes dz}_{r} = f(z)dz^r,$$

καλείται $r$-διαφορικό.

Το $r$-διαφορικό $\Phi = f(z)dz^r$ ονομάζεται ολόμορφο, εάν η συνάρτηση $f$ είναι ολόμορφη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Επιφανειες με σταθερη μεση καμπυλοτητα

Έστω μία ισομετρική εμβάπτιση $f : M \to \mathbb{R}^3$ ενός 2-διάστατου και προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann $M$ στον $\mathbb{R}^3$, με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$. Υπάρχει άλλη ισομετρική εμβάπτιση με την ίδια σταθερή μέση καμπυλότητα $H$ ; Αν ναι ποιός είναι ο χώρος όλων των ισομετρικών εμβαπτίσεων με σταθερή μέση καμπυλότητα$H$; Αυτό είναι το ερώτημα που θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο. Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το $M$ είναι απλά συνεκτικό και ύστερα την περίπτωση που δεν είναι απλά συνεκτικό.

Με τον όρο επιφάνεια, θα εννοούμε μία ισομετρική εμβάπτιση ενός προσανατολισμένου, 2-διάστατου πολυπτύγματος Riemann $M$ στον $\mathbb{R}^3$.

## 2.1 Απλά συνεκτικές επιφάνειες

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την περίπτωση που το πολύπτυγμα $M$ είναι απλά συνεκτικό.

Το ακόλουθο θεώρημα [14] θα παίξει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια του κεφαλαίου.

**Θεώρημα 2.1.1.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, όπου $M$ είναι ένα απλά συνεκτικό και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο. Τότε υπάρχει μια μονοπαραμετρική, $2\pi$-περιοδική οικογένεια ισομετρικών εμβαπτίσεων (associate family)*

$$f_\theta : M \to \mathbb{R}^3, \ \ \text{για κάθε } \theta \in \mathbb{R},$$

*με μέση καμπυλότητα $H$. Επιπλέον η $f_\theta$ είναι τετριμμένη εάν $f(M)$ είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ τύπου $(1,1)$ ώστε

$$A_\theta = HI + (A - HI) \circ J_\theta,$$

όπου $A$ είναι ο τελεστής σχήματος της $f$. Θα δείξουμε ότι το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ πληρεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος 1.3.6 $(i)$, δηλαδή ότι είναι αυτοπροσηρτημένο και ικανοποιεί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi.

Για να δείξουμε ότι είναι αυτοπροσηρτημένο αρκεί να δείξουμε ότι $A_\theta = A_\theta{}^*$. Πράγματι σύμφωνα με τη σχέση (1.1), έχουμε

$$\begin{aligned} A_\theta^* &= \big(HI + (A - HI)\circ J_\theta\big)^* \\ &= HI^* + \big((A-HI)\circ J_\theta\big)^* \\ &= HI + J_\theta{}^* \circ (A - HI)^* \\ &= HI + J_{-\theta} \circ (A - HI). \end{aligned}$$

Επειδή ο $A - HI$ έχει μηδενικό ίχνος, από την Πρόταση 1.1.6 ισχύει

$$J_{-\theta}\circ (A - HI) = (A - HI)\circ J_\theta,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι $A_\theta = A_\theta{}^*$.

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι ο $A_\theta$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi, δηλαδή για $X, Y, Z \in \Delta(M)$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$R(X,Y)Z = \langle A_\theta Y, Z\rangle A_\theta X - \langle A_\theta X, Z\rangle A_\theta Y, \tag{2.1}$$

$$\big(\nabla_X A_\theta\big)Y = \big(\nabla_Y A_\theta\big)X. \tag{2.2}$$

Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ κυρίων διευθύνσεων, δηλαδή $Ae_1 = k_1 e_1$ και $Ae_2 = k_2 e_2$. Για την σχέση (2.1) λόγω των ιδιοτήτων του τανυστή καμπυλότητας, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 = R(e_1,e_2)e_1,$$

και

$$\langle A_\theta e_2, e_2\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_2\rangle A_\theta e_2 = R(e_1,e_2)e_2.$$

Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} \langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 &= \langle He_2 + (A-HI)\circ J_\theta e_2, e_1\rangle \\ &\quad \cdot\big(He_1 + (A-HI)\circ J_\theta e_1\big) \\ &= \langle J_{-\theta}\circ(A-HI)e_2, e_1\rangle \\ &\quad \cdot\big(He_1 + J_{-\theta}\circ(A-HI)e_1\big) \\ &= \langle -\mu J_{-\theta}e_2, e_1\rangle\big(He_1 + \mu J_{-\theta}e_1\big) \\ &= -\mu\sin\theta(He_1 + \mu J_{-\theta}e_1), \end{aligned}$$

όπου $\mu = (k_1 - k_2)/2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} \langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 &= \langle He_1 + (A-HI)\circ J_\theta e_1, e_1\rangle \\ &\quad \cdot\big(He_2 + (A-HI)\circ J_\theta e_2\big) \\ &= \langle He_1 + J_{-\theta}\circ(A-HI)e_1, e_1\rangle \\ &\quad \cdot\big(He_2 + J_{-\theta}\circ(A-HI)e_2\big) \\ &= \big(H + \mu\langle J_{-\theta}e_1, e_1\rangle\big)\big(He_2 - \mu J_{-\theta}e_2\big) \\ &= (H + \mu\cos\theta)\big(He_2 - \mu J_{-\theta}e_2\big). \end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει

$$\begin{aligned}\langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 &= -\mu\sin\theta(He_1 + \mu J_{-\theta}e_1)\\ &\quad -(H+\mu\cos\theta)\big(He_2 - \mu J_{-\theta}e_2\big)\\ &= -k_1k_2e_2\\ &= \langle Ae_2, e_1\rangle Ae_1 - \langle Ae_1, e_1\rangle Ae_2\\ &= R(e_1,e_2)e_1.\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε

$$\langle A_\theta e_2, e_2\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_2\rangle A_\theta e_2 = R(e_1,e_2)e_2.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο $A_\theta$ πληροί την εξίσωση Codazzi, δηλαδή την σχέση (2.2).

Επειδή $A_\theta = HI + (A-HI)\circ J_\theta$, τότε για τυχόν $X\in\Delta(M)$ ισχύει

$$\nabla_X A_\theta = \nabla_X(HI) + \nabla_X\big((A-HI)\circ J_\theta\big).$$

Λόγω της Πρότασης 1.1.5 και επειδή $\nabla_X(HI)=0$, έχουμε

$$\nabla_X A_\theta = \nabla_X A\circ J_\theta + (A-HI)\circ\nabla_X J_\theta.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.2.11 λαμβάνουμε ότι $\nabla_X J_\theta = 0$. Συνεπώς

$$\nabla_X A_\theta = \nabla_X A\circ J_\theta.$$

Λόγω της Πρότασης 1.1.6 η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\nabla_X A_\theta = J_{-\theta}\circ\nabla_X A.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$(\nabla_X A_\theta)Y - (\nabla_Y A_\theta)X = J_{-\theta}\big((\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X)\big) = 0,$$

αφού ο $A$ ως τελεστής σχήματος της $f$ ικανοποιεί την την εξίσωση Codazzi.

Άρα ο $A_\theta$ πληροί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi. Οπότε από το Θεώρημα 1.3.6, υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $f_\theta : M\to\mathbb{R}^3$ με τελεστή σχήματος ακριβώς τον $A_\theta$.

Μένει να αποδείξουμε ότι οι $f, f_\theta$ έχουν την ίδια μέση καμπυλότητα $H$. Πράγματι

$$\begin{aligned}2H_{f_\theta} &= \mathrm{tr}A_\theta\\ &= \mathrm{tr}\big(HI + (A-HI)\circ J_\theta\big)\\ &= 2H + \mathrm{tr}\big((A-HI)\circ J_\theta\big)\\ &= 2H + \cos\theta\,\mathrm{tr}(A-HI) + \sin\theta\,\mathrm{tr}\big((A-HI)\circ J\big)\\ &= 2H,\end{aligned}$$

αφού $\mathrm{tr}(A-HI)=0$ και $\mathrm{tr}\big((A-HI)\circ J\big)=0$.

Εάν η $f_\theta$ είναι τετριμμένη, δηλαδή υπάρχει $\tau_\theta$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $f_\theta = \tau_\theta\circ f$, θα ισχύει ότι ο τελεστής σχήματος $A_\theta$ της $f_\theta$ θα είναι $A$. Από την έκφραση του $A_\theta$ προκύπτει ότι $(A-HI)\circ J_\theta = A-HI$ από το οποίο έπεται ότι $A-HI=0$, ή ισοδύναμα ότι η επιφάνεια είναι ολικά ομφαλική. Έτσι $f(M)$ είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας. $\square$

Το ακόλουθο θεώρημα [14] μας λέει ότι αυτός είναι ουσιαστικά και ο μόνος τρόπος ισομετρικής παραμόρφωσης απλά συνεκτικών επιφανειών με σταθερή μέση καμπυλότητα.

**Θεώρημα 2.1.2.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση ενός προσανατολισμένου και απλά συνεκτικού πολυπτύγματος Riemann διάστασης δύο, με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$. Εάν θεωρήσουμε $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, τότε υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ και $\tau$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\tilde{f} = \tau \circ f_\theta$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι η $f$ δεν είναι ολικά ομφαλική. Θεωρούμε τα τανυστικά πεδία $\widetilde{A} - HI$ και $A - HI$, όπου $A$ και $\widetilde{A}$ είναι οι τελεστές σχήματος των ισομετρικών εμβαπτίσεων $f$ και $\tilde{f}$ αντίστοιχα. Ισχύει ότι $\mathrm{tr}(A - HI) = \mathrm{tr}(\widetilde{A} - HI) = 0$ και $\det A = \det \widetilde{A}$, από τα οποία συνεπάγεται ότι $\det(A - HI) = \det(\widetilde{A} - HI)$. Συνεπώς από την Πρόταση 1.1.6, έπεται ότι γύρω από κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχει μία περιοχή $U \subset M \backslash M_0$ και μία λεία συνάρτηση $\varphi : U \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\widetilde{A} - HI = (A - HI) \circ J_\varphi$. Συμβολίζουμε με $M_0$ το σύνολο των ομφαλικών σημείων που αποτελείται από μεμονωμένα σημεία σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1.

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\varphi$ είναι σταθερή. Γνωρίζουμε ότι οι τελεστές σχήματος $\tilde{A}, A$ πληρούν την εξίσωση Codazzi, δηλαδή

$$\big(\nabla_X \tilde{A}\big)Y = \big(\nabla_Y \tilde{A}\big)X \tag{2.3}$$

και

$$\big(\nabla_X A\big)Y = \big(\nabla_Y A\big)X. \tag{2.4}$$

Από τον ορισμό του $J_\varphi$, για $X \in \Delta(M)$ και λόγω της Πρότασης 1.2.11 έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_X J_\varphi &= \nabla_X(\cos\varphi I + \sin\varphi J) \\ &= (X\varphi)(-\sin\varphi I + \cos\varphi J) \\ &= (X\varphi) J_{\varphi+\pi/2}. \end{aligned}$$

Εφόσον $\widetilde{A} = HI + (A - HI) \circ J_\varphi$, κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.1.6, έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_X \tilde{A} &= \big(\nabla_X A\big) \circ J_\varphi + (A - HI) \circ \nabla_X J_\varphi \\ &= \big(\nabla_X A\big) \circ J_\varphi + X(\varphi)(A - HI) \circ J_{\varphi+\pi/2} \\ &= \big(\nabla_X A\big) \circ J_\varphi + X(\varphi) J_{-\varphi-\pi/2} \circ (A - HI). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Επιπλέον ισχύει

$$(A - HI) \circ J_\varphi = J_{-\varphi} \circ (A - HI).$$

Παραγωγίζοντας στη διεύθυνση ενός διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου $X$, προκύπτει

$$\big(\nabla_X A\big) \circ J_\varphi + (A - HI) \circ \nabla_X J_\varphi = \nabla_X J_{-\varphi} \circ (A - HI) + J_{-\varphi} \circ \nabla_X A.$$

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε έχουμε

$$\big(\nabla_X A\big) \circ J_\varphi + X(\varphi)(A - HI) \circ J_{\varphi+\pi/2} = -X(\varphi) J_{-\varphi+\pi/2} \circ (A - HI) + J_{-\varphi} \circ \nabla_X A,$$

ή

$$\big(\nabla_X A\big)\circ J_\varphi + X(\varphi)J_{-\varphi-\pi/2}\circ(A-HI) = -X(\varphi)J_{-\varphi+\pi/2}\circ(A-HI) + J_{-\varphi}\circ\nabla_X A.$$

Άρα

$$\nabla_X A\circ J_\varphi = J_{-\varphi}\circ\nabla_X A, \tag{2.6}$$

αφού $J_{-\varphi-\pi/2}+J_{-\varphi+\pi/2}=0$.

Άρα η (2.5) λαμβάνοντας υπόψη την (2.6), γίνεται

$$\begin{aligned}
\nabla_X\tilde{A} &= J_{-\varphi}\circ\nabla_X A + X(\varphi)J_{-\varphi-\pi/2}\circ(A-HI)\\
&= J_{-\varphi}\circ\big(\nabla_X A + X(\varphi)J_{-\pi/2}\circ(A-HI)\big)\\
&= J_{-\varphi}\circ\big(\nabla_X A - X(\varphi)J\circ(A-HI)\big).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Από την (2.3) και την (2.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \big(\nabla_X\tilde{A}\big)Y - \big(\nabla_Y\tilde{A}\big)X\\
&= -J_{-\varphi}\big(X(\varphi)J\circ(A-HI)Y - Y(\varphi)J\circ(A-HI)X\big)\\
&= -J_{-\varphi+\pi/2}\big(X(\varphi)(A-HI)Y - Y(\varphi)(A-HI)X\big).
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1,e_2\}$ κυρίων διευθύνσεων της $f$ στο $U$. Τότε έχουμε $(A-HI)e_1=\mu e_1$ και $(A-HI)e_2=-\mu e_2$, όπου $\mu=(k_1-k_2)/2$. Εφόσον δεν υπάρχουν ομφαλικά σημεία και από το γεγονός ότι τα $e_1,e_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι

$$e_1(\varphi)=e_2(\varphi)=0.$$

Επομένως η συνάρτηση $\varphi$ είναι σταθερή στην περιοχή $U$ και κατ' επέκταση σε ολόκληρο το $M\backslash M_0$. Όμως επειδή το σύνολο $M_0$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1, τότε η συνάρτηση $\varphi$ θα είναι σταθερή σε ολόκληρο το $M_0$. Επομένως καταλήγουμε στο ότι η $\varphi$ είναι σταθερή σε ολόκληρο το $M$. Έτσι καταλήγουμε ότι ο τελεστής σχήματος της $\tilde{f}$ θα είναι της μορφής

$$\tilde{A} = HI + (A-HI)\circ J_\theta,\ \text{ με }\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Από το Θεώρημα 1.3.6 υπάρχει $\tau$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\widetilde{f}=\tau\circ f_\theta$. □

Στην περίπτωση ελαχιστικών επιφανειών, η οικογένεια $f_\theta$ δύναται να περιγραφεί και διαφορετικά.

**Πρόταση 2.1.3.** *Εάν $M$ είναι ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα και $\omega$ μία 1-μορφή η οποία είναι κλειστή, δηλαδή $d\omega=0$, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $u: M\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $du=\omega$.*

Έστω $f: M\to\mathbb{R}^3$ μία απλά συνεκτική και ελαχιστική επιφάνεια. Θεωρούμε τυχαίο σταθερό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και την 1-μορφή $\omega_\theta$, με τύπο $\omega_\theta=\langle df\circ J_\theta,\vec{\alpha}\rangle$. Για τυχαία $X,Y\in\Delta(M)$, έχουμε

$$d\omega_\theta(X,Y) = X\big(\omega_\theta(Y)\big) - Y\big(\omega_\theta(X)\big) - \omega_\theta([X,Y]). \tag{2.8}$$

Το $\omega_\theta$ μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\omega_\theta = \cos\theta d\langle f, \vec{\alpha}\rangle + \sin\theta\omega_{\pi/2},$$

και το διαφορικό της θα είναι

$$d\omega_\theta = \cos\theta d^2\langle f, \vec{\alpha}\rangle + \sin\theta d\omega_{\pi/2},$$

ή αλλιώς

$$d\omega_\theta = \sin\theta d\omega_{\pi/2}, \tag{2.9}$$

αφού $d^2\langle f, \vec{\alpha}\rangle = 0$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο του Gauss, έχουμε

$$\begin{aligned} d\omega_{\pi/2}(X,Y) &= X\big(\omega_{\pi/2}(Y)\big) - Y\big(\omega_{\pi/2}(X)\big) - \omega_{\pi/2}[X,Y] \\ &= X\langle df(JY), \vec{\alpha}\rangle - Y\langle df(JX), \vec{\alpha}\rangle - \langle df(J[X,Y]), \vec{\alpha}\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X df(JY), \vec{\alpha}\rangle - \langle \overline{\nabla}_Y df(JX), \vec{\alpha}\rangle - \langle df(J[X,Y]), \vec{\alpha}\rangle \\ &= \langle df(J\nabla_X Y), \vec{\alpha}\rangle - \langle df(J\nabla_Y X), \vec{\alpha}\rangle - \langle df(J\nabla_X Y), \vec{\alpha}\rangle \\ &\quad + \langle df(J\nabla_Y X), \vec{\alpha}\rangle + \langle B(X,JY), \vec{\alpha}\rangle - \langle B(Y,JX), \vec{\alpha}\rangle \\ &= \langle B(X,JY) - B(Y,JX), \vec{\alpha}\rangle \\ &= \big(\langle AX, JY\rangle - \langle AY, JX\rangle\big)\langle \xi, \vec{\alpha}\rangle \\ &= -\big(\langle J\circ AX, Y\rangle + \langle J\circ AY, X\rangle\big)\langle \xi, \vec{\alpha}\rangle, \end{aligned}$$

όπου $\xi$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της $f$.

Επειδή η $f$ είναι ελαχιστική, λόγω της Πρότασης 1.1.6 έχουμε $A\circ J = -J\circ A$. Αυτό μας δίνει $d\omega_\theta = 0$. Από την Πρόταση 2.1.3 συνεπάγεται ότι υπάρχουν συναρτήσεις

$$f_i^\theta : M \to \mathbb{R}, \;\; i = 1,2,3,$$

τέτοιες ώστε $\omega_i^\theta = df_i^\theta$. Μπορούμε να ορίσουμε την

$$f_\theta : M \to \mathbb{R}^3, \;\; \text{με} \;\; f_\theta = (f_1^\theta, f_2^\theta, f_3^\theta).$$

Το διαφορικό της $f_\theta$ θα είναι :

$$\begin{aligned} df_\theta &= \big(df_1^\theta, df_2^\theta, df_3^\theta\big) \\ &= \big(\omega_1^\theta, \omega_2^\theta, \omega_3^\theta\big) \\ &= \omega_\theta \\ &= df\circ J_\theta. \end{aligned}$$

Άρα η $f_\theta$ είναι μία ισομετρική εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\xi_\theta = \xi$ και τελεστή σχήματος $A_\theta$.

Επιπλέον για τον τελεστή σχήματος της $f_\theta$ ισχύει ότι

$$A_\theta = J_{-\theta}\circ A = A\circ J_\theta \;\; \text{για κάθε} \;\; \theta\in[0,2\pi].$$

Πράγματι εφόσον $\xi_\theta = \xi$, από τον τύπο του Weingarten λαμβάνουμε

$$df_\theta \circ A_\theta(X) = df \circ A(X), \text{ για κάθε } X \in \Delta(M),$$

ή ισοδύναμα

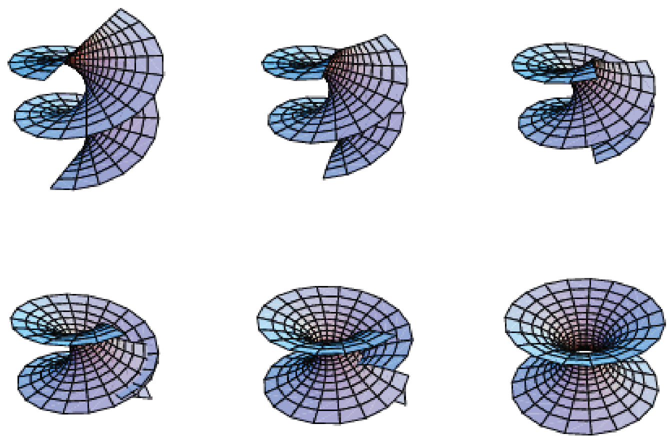
$$df \circ J_\theta \circ A_\theta(X) = df \circ A(X).$$

Προφανώς η $f_\theta$ θα έχει την έκφραση:

$$f_\theta = \cos\theta f + \sin\theta f_{\pi/2},$$

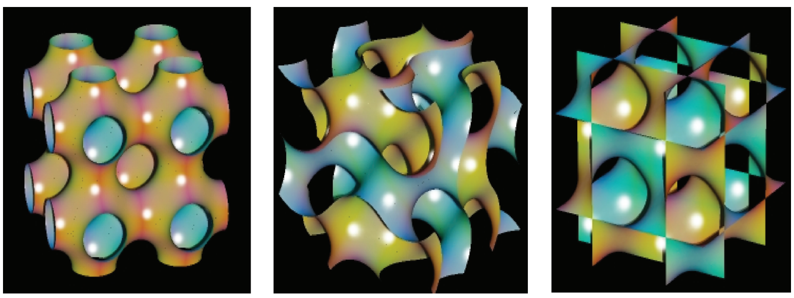
ως προς παράλληλη μεταφορά στον $\mathbb{R}^3$.

Ένα παράδειγμα μιας τοπικής ισομετρικής παραμόρφωσης ελαχιστικών επιφανειών που διατηρεί τη μέση καμπυλότητα, είναι η παραμόρφωση ενός ελικοειδούς σε αλυσοειδές και αντίστροφα (βλέπε σχήμα 2.1). Το αλυσοειδές και το ελικοειδές ανήκουν στην ίδια associate family και κατά την παραμόρφωση το κάθετο διανυσματικό πεδίο παραμένει σταθερό, ενώ «στρίβουμε» την δεύτερη θεμελιώδη μορφή.



Σχήμα 2.1: Ελικοειδές – Αλυσοειδές

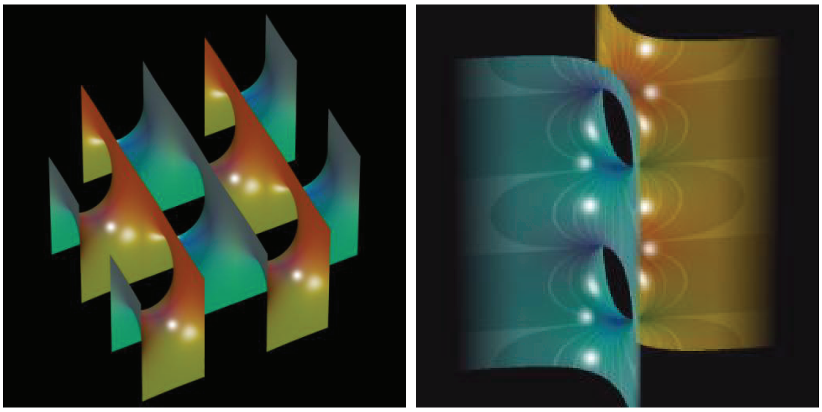
Στην ίδια associate family βρίσκονται επίσης και οι ελαχιστικές επιφάνειες P του Schwarz, G(Gyroid), καθώς και η D(Diamond) του Schwarz (βλέπε σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Επιφάνειες P,G,D

Όταν η παράμετρος $\theta$ της associate family παίρνει τις τιμές 0 και 180, τότε προκύπτει η επιφάνεια P. Στις τιμές 90 και 270 προκύπτει η επιφάνεια D, ενώ η επιφάνεια G προκύπτει από συνδυασμούς πραγματικών και φανταστικών συνιστωσών που αντιστοιχούν περίπου στην τιμή $51,985^\circ$ από τον πραγματικό άξονα.

Επιπλέον, η 1η και η 2η επιφάνεια του Scherk (βλέπε σχήμα 2.3), οι οποίες ανακαλύφθηκαν το 1834, αποτελούν ένα ακόμη παράδειγμα ελαχιστικών επιφανειών που ανήκουν στην ίδια associate family.



Σχήμα 2.3: 1η και 2η επιφάνεια του Scherk

## 2.2 Επιφάνειες με μη τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα

Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, η οποία δεν είναι ολικά ομφαλική. Υποθέτουμε ότι το $M$ είναι ένα προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο, με μη τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα. Θεωρούμε τον καθολικό χώρο κάλυψης $(\widetilde{M}, \pi)$ του $M$. Το απλά συνεκτικό πολύπτυγμα $\widetilde{M}$ είναι εφοδιασμένο με προσανατολισμό και μετρική Riemann, ώστε η $\pi$ είναι μία τοπική ισομετρία, που διατηρεί τον προσανατολισμό. Ορίζουμε τη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^3, \ \text{ με } \widetilde{f} = f \circ \pi.$$

**Λήμμα 2.2.1.** *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(i) Η $\widetilde{f}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση.*

*(ii) Εάν $\xi : M \to \mathbb{R}^3$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της $f$, τότε το $\widetilde{\xi} = \xi \circ \pi : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^3$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\widetilde{f}$.*

*(iii) Εάν $A$ είναι ο τελεστής σχήματος της $f$, τότε ο $\widetilde{A} = d\pi^{-1} \circ A \circ d\pi$ είναι ο τελεστής σχήματος της $\widetilde{f}$.*

*(iv) Η $\widetilde{f}$ έχει μέση καμπυλότητα $H$.*

*Απόδειξη.* $(i)$ Το διαφορικό της $\widetilde{f}$, $d\widetilde{f} = df \circ d\pi$ είναι 1-1 σε κάθε σημείο, ως σύνθεση 1-1 απεικονίσεων. Για τυχόν $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ και $\tilde{v}, \tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\langle d\widetilde{f}_{\tilde{p}}(\tilde{v}), d\widetilde{f}_{\tilde{p}}(\tilde{w})\rangle &= \langle df_{\pi(\tilde{p})} \circ d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v}), df_{\pi(\tilde{p})} \circ d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{w})\rangle \\ &= \langle d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v}), d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{w})\rangle \\ &= \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle,\end{aligned}$$

αφού η $\pi$ είναι μία τοπική ισομετρία. Άρα η $\widetilde{f}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση.

$(ii)$ Εφόσον το $\xi$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της $f$, τότε σε τυχαίο σημείο $p \in M$ ισχύει $\langle df_p(v), \xi_p\rangle = 0$, για κάθε $v \in T_pM$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle d\widetilde{f}_{\tilde{p}}(\tilde{w}), \widetilde{\xi}_{\tilde{p}}\rangle = 0$, για κάθε $\tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$. Πράγματι για κάθε $\tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$, ισχύει

$$\langle d\widetilde{f}_{\tilde{p}}(\tilde{w}), \widetilde{\xi}_{\tilde{p}}\rangle = \langle df_{\pi(\tilde{p})}\big(d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{w})\big), \xi\big(\pi(\tilde{p})\big)\rangle = 0.$$

$(iii)$ Έστω τυχαίο σημείο $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ και $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$. Τότε $v = d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v}) \in T_pM$ όπου $p = \pi(\tilde{p})$. Για τον τελεστή σχήματος της $\widetilde{f}$ και με βάση το $(ii)$ ισχύει

$$-d\widetilde{f}_{\tilde{p}}(\widetilde{A}\tilde{v}) = d\widetilde{\xi}_{\tilde{p}}(\tilde{v}),$$

που ισοδυναμεί με

$$-df_p(d\pi_{\tilde{p}}\big(\widetilde{A}\tilde{v})\big) = d\xi_p(d\pi_{\tilde{p}}(v)). \tag{2.10}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$d\xi_p(d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v})) = -df_p \circ A \circ d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v}). \tag{2.11}$$

Από τις σχέσεις (2.10), (2.11) και επειδή το διαφορικό της $f$ είναι 1-1, συνεπάγεται ότι $d\pi_{\tilde{p}}(\widetilde{A}\tilde{v}) = A(d\pi_{\tilde{p}}\tilde{v})$, από το οποίο προκύπτει ότι $\widetilde{A}(\tilde{v}) = d\pi_p^{-1} \circ A \circ d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v})$, για τυχαίο διάνυσμα $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$. Επομένως ο τελεστής σχήματος της $\widetilde{f}$ θα είναι $\widetilde{A} = d\pi^{-1} \circ A \circ d\pi$.

$(iv)$ Η μέση καμπυλότητα της $\widetilde{f}$ είναι

$$\begin{aligned}H_{\widetilde{f}} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\tilde{A} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(d\pi^{-1} \circ A \circ d\pi) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A \circ d\pi \circ d\pi^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}A \\ &= H_f.\end{aligned}$$

□

Αφού η $\widetilde{f}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$ και $\widetilde{M}$ ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα, τότε από το Θεώρημα 2.1.1, ορίζεται η $2\pi$-περιοδική, μονοπαραμετρική οικογένεια, $\widetilde{f}_\theta : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^3$ της $\tilde{f}$.

Συμβολίζουμε με $\widetilde{A}_\theta$ τον τελεστή σχήματος της $\widetilde{f}_\theta$ και με $\widetilde{\xi}_\theta$ το αντίστοιχο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της.

Στόχος μας είναι να περιγράψουμε όλες τις ισομετρικές εμβαπτίσεις του διδιάστατου πολυπτύγματος $M$ στον $\mathbb{R}^3$, οι οποίες έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα $H$. Θεωρούμε μία άλλη ισομετρική εμβάπτιση, $g : M \to \mathbb{R}^3$, με μέση καμπυλότητα $H$. Ορίζουμε $\widetilde{g} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^3$, με τύπο $\widetilde{g} = g \circ \pi$. Λόγω του Λήμματος 2.2.1 η $\tilde{g}$ έχει μέση καμπυλότητα $H$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.2 υπάρχει $\tau_\theta$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε:

$$\widetilde{g} = \tau_\theta \circ \widetilde{f}_\theta, \text{ για κάποιο } \theta \in [0, 2\pi].$$

Η περιγραφή του συνόλου όλων των ισομετρικών εμβαπτίσεων του $M$ με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$, ισοδυναμεί με τη μελέτη του συνόλου

$$M(f) = \{\theta \in [0, 2\pi] : \exists f_\theta : M \to \mathbb{R}^3, \text{ τέτοια ώστε } \widetilde{f}_\theta = f_\theta \circ \pi\}.$$

Θεωρούμε την ομάδα $\mathcal{D}$ των μετασχηματισμών στρωμάτων του $\widetilde{M}$. Κάθε στοιχείο της $\mathcal{D}$, είναι ισομετρία του $\widetilde{M}$. Επιλέγουμε ένα στοιχείο $\sigma$ της $\mathcal{D}$ και ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\hat{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^3, \text{ με τύπο } \hat{f} = \widetilde{f}_\theta \circ \sigma.$$

Συμβολίσουμε με $\hat{A}$ τον τελεστή σχήματος και με $\hat{\xi}$ το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\hat{f}$.

**Λήμμα 2.2.2.** *Ισχύουν τα ακόλουθα*

*(i) Η $\hat{f}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση.*

*(ii) Ισχύει ότι $\hat{A} = d\sigma^{-1} \circ \widetilde{A}_\theta \circ d\sigma$, όπου με $\widetilde{A}_\theta$ συμβολίζουμε τον τελεστή σχήματος της $\widetilde{f}_\theta$.*

*(iii) Η $\hat{f}$ έχει μέση καμπυλότητα $H$.*

Η απόδειξη του Λήμματος 2.2.2, είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 2.2.1.

Επειδή $\pi \circ \sigma = \pi$, λόγω του Λήμματος 2.2.1, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= d\sigma^{-1} \circ \widetilde{A}_\theta \circ d\sigma \\
&= (d\pi \circ d\sigma)^{-1} \circ A_\theta \circ (d\pi \circ d\sigma) \\
&= d(\pi \circ \sigma)^{-1} \circ A_\theta \circ d(\pi \circ \sigma) \\
&= d\pi^{-1} \circ A_\theta \circ d\pi \\
&= \widetilde{A}_\theta.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.2 προκύπτει το ακόλουθο:

**Λήμμα 2.2.3.** *Οι ισομετρικές εμβαπτίσεις $\tilde{f}_\theta \circ \sigma$ και $\tilde{f}_\theta$ είναι ισότιμες.*

Άρα για κάθε $\sigma \in \mathcal{D}$ υπάρχει ισομετρία $\Phi_\theta(\sigma)$ του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε

$$\widetilde{f}_\theta \circ \sigma = \Phi_\theta(\sigma) \circ \widetilde{f}_\theta. \tag{2.12}$$

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $\Phi_\theta : \mathcal{D} \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, από την ομάδα μετασχηματισμών στρωμάτων $\mathcal{D}$, στην ομάδα ισομετριών του $\mathbb{R}^3$. Είναι γνωστό [1] ότι η $\Phi_\theta$ είναι αναλυτική ως προς $\theta$. Επιπλέον είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

Πράγματι για $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\Phi_\theta(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \widetilde{f}_\theta &= \widetilde{f}_\theta \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2)\\ &= (\widetilde{f}_\theta \circ \sigma_1) \circ \sigma_2\\ &= \Phi_\theta(\sigma_1) \circ (\widetilde{f}_\theta \circ \sigma_2)\\ &= \big(\Phi_\theta(\sigma_1) \circ \Phi_\theta(\sigma_2)\big) \circ \widetilde{f}_\theta,\end{aligned}$$

από το οποίο συνεπάγεται

$$\big(\Phi_\theta(\sigma_1) \circ \Phi_\theta(\sigma_2)\big)^{-1} \circ \Phi_\theta(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \widetilde{f}_\theta = \widetilde{f}_\theta.$$

Η $\big(\Phi_\theta(\sigma_1) \circ \Phi_\theta(\sigma_2)\big)^{-1} \circ \Phi_\theta(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \tau$ είναι μία ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε $\tau \circ \widetilde{f}_\theta = \widetilde{f}_\theta$. Αυτό σημαίνει ότι $\forall p \in M$, η $\widetilde{f}_\theta(p)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\tau$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Άρα $\tau = I$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι $\Phi_\theta(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \Phi_\theta(\sigma_1) \circ \Phi_\theta(\sigma_2)$, το οποίο υποδηλώνει ότι η $\Phi_\theta$ είναι ομομορφισμός.

**Λήμμα 2.2.4.** *Το $\theta \in M(f)$ αν και μόνο αν $\Phi_\theta(\mathcal{D}) = \{I\}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\theta \in M(f)$. Για τυχόν $\sigma \in \mathcal{D}$, από τη σχέση (2.12) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\Phi_\theta(\sigma) \circ \widetilde{f}_\theta &= \widetilde{f}_\theta \circ \sigma\\ &= (f_\theta \circ \pi) \circ \sigma\\ &= f_\theta \circ (\pi \circ \sigma)\\ &= f_\theta \circ \pi\\ &= \widetilde{f}_\theta.\end{aligned}$$

Άρα

$$\Phi_\theta(\sigma) = \{I\}, \text{ για κάθε } \sigma \in \mathcal{D}.$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $\Phi_\theta(\mathcal{D}) = \{I\}$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $p \in M$ και $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_\theta : M \to \mathbb{R}^3,$$

με

$$f_\theta(p) = \widetilde{f}_\theta(\tilde{p}). \tag{2.13}$$

Η $f_\theta$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, εάν $\tilde{q} \in \pi^{-1}(p)$, τότε υπάρχει $\sigma \in \mathcal{D}$ με $\sigma(\tilde{p}) = \tilde{q}$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_\theta(\tilde{q}) &= \widetilde{f}_\theta \circ \sigma(\tilde{p})\\ &= \Phi_\theta(\sigma) \circ \widetilde{f}_\theta(\tilde{p})\\ &= \widetilde{f}_\theta(\tilde{p}).\end{aligned}$$

Προφανώς ισχύει $\widetilde{f}_\theta = f_\theta \circ \pi$ και επομένως $\theta \in M(f)$. □

Ακολουθεί ένα βασικό θεώρημα [14], το οποίο περιγράφει το σύνολο των ισομετρικών εμβαπτίσεων που έχουν την ίδια σταθερή μέση καμπυλότητα και μη τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα.

**Θεώρημα 2.2.5.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση, με σταθερή μέση καμπυλότητα $H$ και $M$ ένα προσανατολισμένο, 2-διάστατο πολύπτυγμα Riemman με μη τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα. Τότε είτε το σύνολο $M(f)$ είναι πεπερασμένο, είτε $M(f) = [0, 2\pi]$.*

*Απόδειξη.* Έστω το $M(f)$ δεν είναι πεπερασμένο σύνολο. Τότε υπάρχει μία συγκλίνουσα ακολουθία $\{t_n\} \in [0, 2\pi]$ σημείων του συνόλου $M(f)$, που δεν είναι τελικά σταθερή. Έστω ότι η $\{t_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο $t_0 \in [0, 2\pi]$. Επιλέγουμε τυχαίο $\sigma \in \mathcal{D}$. Εφόσον $\{t_n\} \in M(f)$, λόγω του Λήμματος 2.2.4 ικανοποιείται η σχέση

$$\Phi_{t_n}(\sigma) = I, \ \text{ για όλα τα } \ n \in \mathbb{N}.$$

Όμως λόγω συνέχειας έπεται ότι $\Phi_{t_0}(\sigma) = I$, δηλαδή $t_0 \in M(f)$. Ο πίνακας της $\Phi_{t_n}(\sigma)$, ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$\Big(\Phi_{t_n}(\sigma)\Big)_{ij} = \delta_{ij}\,, \ \text{ με } \ i, j = 1, 2, 3.$$

Όμως ισχύει ότι $\Big(\Phi_{t_n}(\sigma)\Big)_{ij} = \Big(\Phi_{t_0}(\sigma)\Big)_{ij}$. Άρα από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $s_n$ που βρίσκεται ανάμεσα στα $t_n, t_0$, ώστε $\Big(\Phi'_{s_n}(\sigma)\Big)_{ij} = 0$, όπου ο τόνος δηλώνει την παράγωγο της $\Phi_t(\sigma)$ ως προς $t$. Προφανώς η ακολουθία $s_n$ συγκλίνει στο $t_0$. Οπότε προκύπτει ότι $\Phi'_{t_0}(\sigma) = 0$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία συμπεραίνουμε ότι $\big(\Phi^{(n)}_{t_0}(\sigma)\big)_{ij} = 0$, για όλα τα $\sigma \in G$ και όλους τους ακεραίους $n \geq 1$.

Επειδή η $\Phi_t(\sigma)$ είναι αναλυτική, αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το $t_0$. Επομένως θα έχουμε

$$\Phi_t(\sigma) = \Phi_{t_0}(\sigma) + \frac{\Phi'_{t_0}(\sigma)}{1!}(t - t_0) + \frac{\Phi''_{t_0}(\sigma)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots,$$

το οποίο σημαίνει ότι $\Phi_t(\sigma) = I$, για όλα τα $\sigma \in \mathcal{D}$. Άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.4 $t \in M(f)$, δηλαδή $M(f) = [0, 2\pi]$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Συμπαγεις επιφανειες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ισομετρικές εμβαπτίσεις $f : M \to \mathbb{R}^3$, όπου $M$ είναι ένα συμπαγές και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που η μέση καμπυλότητα της $f$ δεν είναι σταθερή και θα αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2.1 που οφείλεται στους Lawson και Tribuzy [11]. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε συμπαγείς επιφάνειες που είναι τοπικά $H$-παραμορφώσιμες και θα αποδείξουμε το Θεώρημα 3.3.1 που οφείλεται στον Umehara [17].

Παραθέτουμε πρώτα κάποια προκαταρκτικά που θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη των θεωρημάτων αυτών.

## 3.1 Διαφορικό του Hopf

Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση ενός προσανατολισμένου διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $M$ στον $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $p \in M$ και εργαζόμαστε σε ένα τοπικό σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων γύρω από το $p$, με μιγαδική συντεταγμένη $z = x + iy$.

Επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά την δεύτερη θεμελιώδη μορφή $II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, ως μία $\mathbb{C}$-διγραμμική και συμμετρική απεικόνιση

$$II_p : T_pM^{\mathbb{C}} \times T_pM^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}.$$

Η $\mathbb{C}$-γραμμική επέκταση αυτή, αναλύεται ως

$$II_p = II_p^{(2,0)} + II_p^{(1,1)} + II_p^{(0,2)},$$

για κάθε $p \in M$, όπου για τυχαία διανύσματα $v, w \in T_pM^{\mathbb{C}}$ ισχύει ότι

$$II_p^{(2,0)}(v,w) = II_p\big(\pi'(v), \pi'(w)\big),$$

$$II_p^{(1,1)}(v,w) = II_p\big(\pi'(v), \pi''(w)\big) + II_p\big(\pi''(v), \pi'(w)\big),$$

$$II_p^{(0,2)}(v,w) = II_p\big(\pi''(v), \pi''(w)\big).$$

Ως προς το σύστημα συντεταγμένων είναι

$$II^{(2,0)} = II(\partial, \partial)dz^2,$$

$$II^{(1,1)} = II(\partial,\bar{\partial})dz \otimes d\bar{z} + II(\bar{\partial},\partial)d\bar{z} \otimes dz,$$
$$II^{(0,2)} = II(\bar{\partial},\bar{\partial})d\bar{z}^2.$$

Το τετραγωνικό διαφορικό $\Phi = 2\varphi dz^2$, όπου $\varphi = 2II(\partial,\partial)$, ονομάζεται διαφορικό του Hopf. Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε τους τελεστές Wirtinger $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$, οι οποίοι αποτελούν βάση του εφαπτόμενου χώρου. Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε $\frac{\partial}{\partial z} = \partial$ και $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial}$.

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} II(\partial,\partial) &= \frac{1}{4}\big(II(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}) - 2iII(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}) - II(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y})\big) \\ &= \frac{1}{4}(L-N) - \frac{1}{2}iM. \end{aligned}$$

Επίσης η μέση καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$H = \frac{L+N}{2E},$$

ενώ η καμπυλότητα Gauss από τον τύπο

$$K = \frac{LN-M^2}{E^2}.$$

Με την χρήση όσων προαναφέραμε εύκολα αποδεικνύεται ότι από την εξίσωση του Gauss προκύπτει η σχέση

$$|\varphi|^2 = E^2(H^2 - K), \tag{3.1}$$

ενώ από την εξίσωση Codazzi η σχέση

$$\varphi_{\bar{z}} = \frac{1}{2}EH_z, \tag{3.2}$$

όπου $\varphi_{\bar{z}} = \bar{\partial}\varphi$ και $H_z = \partial H$.

Πράγματι, λόγω της εξίσωσης Codazzi, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{\partial}II(\partial,\partial) &= \bar{\partial}\langle A\partial,\partial\rangle \\ &= \langle \nabla_{\bar{\partial}}A\partial,\partial\rangle + \langle A\partial,\nabla_{\bar{\partial}}\partial\rangle \\ &= \langle (\nabla_{\bar{\partial}}A)\partial + A(\nabla_{\bar{\partial}}\partial),\partial\rangle + \langle A\partial,\nabla_{\bar{\partial}}\partial\rangle \\ &= \langle (\nabla_{\partial}A)\bar{\partial},\partial\rangle + \langle A(\nabla_{\bar{\partial}}\partial),\partial\rangle + \langle \partial, A(\nabla_{\bar{\partial}}\partial)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial}(A\bar{\partial}) - A(\nabla_{\partial}\bar{\partial}),\partial\rangle + 2\langle \partial, A(\nabla_{\bar{\partial}}\partial)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial}(A\bar{\partial}),\partial\rangle + \langle A(2\nabla_{\bar{\partial}}\partial - \nabla_{\partial}\bar{\partial}),\partial\rangle. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Γνωρίζουμε από την (1.2) ότι

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{11}^1\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{21}^1\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{21}^2\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial y}=\Gamma_{22}^{1}\frac{\partial}{\partial x}+\Gamma_{22}^{2}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y}=\Gamma_{12}^{1}\frac{\partial}{\partial x}+\Gamma_{12}^{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Υπολογίζοντας τα σύμβολα Christoffel σύμφωνα με την (1.3), προκύπτει ότι

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2E}(E_x\frac{\partial}{\partial x}-E_y\frac{\partial}{\partial y}),\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2E}(-E_x\frac{\partial}{\partial x}+E_y\frac{\partial}{\partial y}),$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2E}(E_y\frac{\partial}{\partial x}+E_x\frac{\partial}{\partial y}),\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2E}(E_y\frac{\partial}{\partial x}+E_x\frac{\partial}{\partial y}).$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial}\partial &= \nabla_{\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})}\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})\\ &= \frac{1}{4}\{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})-i\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})\}\\ &= \frac{1}{4}\{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x}-i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial y}-i\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial y}\}\\ &= \frac{1}{4E}\{(E_x\frac{\partial}{\partial x}-E_y\frac{\partial}{\partial y})-i(E_y\frac{\partial}{\partial x}+E_x\frac{\partial}{\partial y})\},\end{aligned}\tag{3.4}$$

ενώ με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\nabla_{\bar{\partial}}\partial=\nabla_{\partial}\bar{\partial}=0.\tag{3.5}$$

Από τις σχέσεις (3.3), (3.4) και (3.5) έπεται ότι

$$\begin{aligned}\bar{\partial}II(\partial,\partial) &= \langle\nabla_{\partial}(A\bar{\partial}),\partial\rangle\\ &= \partial\langle A\bar{\partial},\partial\rangle-\langle A(\nabla_{\partial}\partial),\bar{\partial}\rangle\\ &= \frac{1}{4}\partial(\langle A\partial x,\partial x\rangle)-\frac{1}{4E}(E_x-iE_y)\\ &\quad\cdot\langle A\partial x-iA\partial y,\bar{\partial}\rangle\\ &= \frac{1}{4}\partial\big(II(\partial x,\partial x)+II(\partial y,\partial y)\big)\\ &\quad+\frac{1}{2E}(E_x-iE_y)\langle A\frac{1}{2}(\partial x-i\partial y),\bar{\partial}\rangle\\ &= \frac{1}{4}\partial(L+N)-\frac{\partial E}{E}\langle A\partial,\bar{\partial}\rangle\\ &= \frac{1}{4}\partial(L+N)-\frac{L+N}{4}\frac{\partial E}{E}\\ &= \frac{E}{4}(\frac{\partial(L+N)E-(L+N)\partial E}{E^2})\\ &= \frac{E}{4}\partial(\frac{L+N}{E})\\ &= \frac{E}{4}H_z,\end{aligned}$$

απ′ όπου προκύπτει η (3.2).

Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ είναι ένα προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο.

**Λήμμα 3.1.1.** *(i) Το διαφορικό του Hopf $\Phi = \varphi dz^2$ μηδενίζεται μόνο στα ομφαλικά σημεία.*

*(ii) Το διαφορικό του Hopf είναι ολόμορφο, αν και μόνο αν η ισομετρική εμβάπτιση $f : M \to \mathbb{R}^3$ έχει σταθερή μέση καμπυλότητα.*

*(iii) Εάν η $f$ δεν είναι ολικά ομφαλική και έχει σταθερή μέση καμπυλότητα, τότε τα ομφαλικά της σημεία είναι μεμονωμένα.*

*Απόδειξη.* $(i)$ Εάν το διαφορικό του Hopf μηδενίζεται σε ένα σημείο $p \in M$, τότε $L = N$ και $M = 0$ στο σημείο αυτό. Έτσι η καμπυλότητα Gauss θα είναι $K = (\frac{L}{E})^2 = H^2$. Επομένως προκύπτει

$$H^2 - K = 0,$$

δηλαδή το $p$ είναι ομφαλικό σημείο.

Αντίστροφα, εάν ένα σημείο $p \in M$ είναι ομφαλικό τότε

$$H^2 - K = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$(L - N)^2 + M^2 = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\Phi_p = 0$.

$(ii)$ Από την σχέση (3.2) είναι εμφανές ότι η $\varphi$ είναι ολόμορφη, ή ισοδύναμα ότι το διαφορικό του Hopf είναι ολόμορφο αν και μόνο αν $H_z = 0$, ή αλλιώς ότι η μέση καμπυλότητα είναι σταθερή.

$(iii)$ Προκύπτει από τα $(i), (ii)$ και από το γεγονός ότι τα σημεία μηδενισμού ενός ολόμορφου διαφορικού είναι μεμονωμένα. □

**Πρόταση 3.1.2.** *Έστω $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^3$ ισομετρικές εμβαπτίσεις, οι οποίες δεν είναι ολικά ομφαλικές, με την ίδια μέση καμπυλότητα. Εάν $\Phi_1, \Phi_2$ είναι τα διαφορικά του Hopf των $f_1, f_2$ αντίστοιχα, τότε υπάρχει συνάρτηση $\theta$ ορισμένη* modulo$2\pi$ *στο σύνολο $M \backslash M_0$, όπου $M_0$ είναι το σύνολο των ομφαλικών σημείων της $f_1$ (άρα και της $f_2$), ώστε*

$$\Phi_2 = e^{i\theta}\Phi_1.$$

*Επιπλέον αν $\Phi_1 = \Phi_2$, τότε οι $f_1, f_2$ είναι ισότιμες.*

*Απόδειξη.* Συμβολίσουμε με $A_1, A_2$ τους τελεστές σχήματος των $f_1, f_2$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής σχήματος της $f_2$, μπορεί να πάρει τη μορφή $A_2 = HI + (A_1 - HI) \circ J_\theta$, για κάποια συνάρτηση $\theta$. Πράγματι εφόσον $\mathrm{tr}(A_2 - HI) = \mathrm{tr}(A_1 - HI) = 0$ και $\det A_2 = \det A_1$, συνεπάγεται ότι $\det(A_2 - HI) = \det(A_1 - HI)$. Άρα λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.1.6, έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση $\theta$ ορισμένη modulo$2\pi$ ώστε

$A_2 - HI = (A_1 - HI) \circ J_\theta$, ή αλλιώς $A_2 = HI + (A_1 - HI) \circ J_\theta$. Επομένως η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της $f_2$ θα είναι

$$II_{f_2}(\partial, \partial) = \langle A_2 \partial, \partial \rangle = \langle (A_1 - HI) \circ J_\theta \partial, \partial \rangle.$$

Προφανώς έχουμε

$$J_\theta \partial = \cos\theta \partial + \sin\theta J \partial. \tag{3.6}$$

Επιπλέον, επειδή $\partial \in TM^{(1,0)}$ ισχύει

$$J\partial = i\partial.$$

Άρα (3.6) γίνεται

$$J_\theta \partial = e^{i\theta} \partial. \tag{3.7}$$

Επομένως σύμφωνα με τη (3.8) αποδεικνύεται

$$II_{f_2}(\partial, \partial) = e^{i\theta} II_{f_1}(\partial, \partial),$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi_2 = e^{i\theta} \Phi_1.$$

□

## 3.2 Επιφάνειες με μη σταθερή μέση καμπυλότητα

Γνωρίζουμε ότι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ μπορεί να καθοριστεί μέχρι ισοτιμίας από την πρώτη και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το ερώτημα σε ποιό βαθμό οι συμπαγείς επιφάνειες, καθορίζονται από την πρώτη θεμελιώδη μορφή και την μέση καμπυλότητα $H$, όταν αυτή δεν είναι σταθερή. Στόχος σε αυτή την ενότητα είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα των Lawson και Tribuzy [11].

**Θεώρημα 3.2.1.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, ενός συμπαγούς και προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann διάστασης δύο. Εάν η μέση καμπυλότητα $H$ της $f$ δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχει το πολύ και άλλη μία ισομετρική εμβάπτιση του $M$ στον $\mathbb{R}^3$, μη ισότιμη με την $f$, με μέση καμπυλότητα $H$.*

Πρώτα όμως θα παραθέσουμε ορισμένα λήμματα που θα μας χρησιμεύσουν στην απόδειξή του.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τρεις ισομετρικές εμβαπτίσεις

$$f_i : M \to \mathbb{R}^3, \text{ με } i = 1, 2, 3$$

με την ίδια μέση καμπυλότητα $H$. Θεωρούμε τα αντίστοιχα διαφορικά του Hopf, $\Phi_i = \varphi_i(z)dz^2$ και αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα που αφορά τις διαφορές αυτών.

**Λήμμα 3.2.2.** *Τα τετραγωνικά διαφορικά $\Phi_{ij} \equiv \Phi_i - \Phi_j$, $1 \le i, j \le 3$, είναι ολόμορφα.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\bar{\partial}\varphi_i = \bar{\partial}\varphi_j.$$
Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από την (3.2), αφού οι ισομετρικές εμβαπτίσεις $f_i,\ i = 1,2,3$ έχουν την ίδια μέση καμπυλότητα $H$ και την ίδια πρώτη θεμελιώδη μορφή. □

Η ακόλουθη πρόταση που αποδεικνύεται στο [16], πρόκειται να παίξει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1.

**Πρόταση 3.2.3.** *Έστω $f_k : M \to \mathbb{R}^3$, $k = 1,2,3$, μη ισότιμες ανά δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις, χωρίς ομφαλικά σημεία. Τότε ισχύει ότι*
$$\Delta^0 \log\varphi_k = 4|\bar{\partial}\log\varphi_k|^2, \tag{3.8}$$
*για κάθε $k = 1,2,3$, και κάθε μιγαδικό χάρτη $(U,z)$, όπου $\Delta^0 = 4\bar{\partial}\partial$.*

*Απόδειξη.* Εάν $\Phi_1, \Phi_2$ είναι τα διαφορικά του Hopf των $f_1, f_2$ αντίστοιχα, τότε από την Πρόταση 3.1.2 θα ισχύει
$$\Phi_2 = e^{i\theta}\Phi_1.$$
Στη συνέχεια θεωρούμε το τετραγωνικό διαφορικό
$$\Phi_{12} = (1 - e^{i\theta})\Phi_1,$$
ή αλλιώς
$$\Phi_{12} = (1 - g)hdz^2,$$
όπου $g = e^{i\theta}$ και $\varphi_1 = h$.

Από την ολομορφία του $\Phi_{12}$ ή αντίστοιχα της $(1-g)h$, που προκύπτει από το Λήμμα 3.2.2, ισχύει
$$\bar{\partial}\big(h(1-g)\big) = \bar{\partial}h(1-g) - ihg\bar{\partial}\theta = 0,$$
απ′ όπου προκύπτει ότι
$$\bar{\partial}\theta = -i(\bar{g} - 1)\bar{\partial}(\log h). \tag{3.9}$$
Επιπλέον ισχύει
$$\partial\{\bar{h}(1-\bar{g})\} = \partial\bar{h}(1-\bar{g}) - i\bar{h}\bar{g}\partial\theta = 0,$$
οπότε
$$\partial\theta = i(g-1)\partial(\log\bar{h}). \tag{3.10}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.9) και (3.10) προκύπτει ότι
$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}\theta &= \partial\{-i(\bar{g}\bar{\partial}\log h)\} \\
&= -i\partial\bar{g}(\bar{\partial}\log h) - i(\bar{g}-1)\bar{\partial}\partial\log h \\
&= -i\bar{g}\partial\theta(\bar{\partial}\log h) - i(\bar{g}-1)\frac{\Delta^0(\log h)}{4} \\
&= -i\bar{g}(g-1)(\partial\log\bar{h})(\bar{\partial}\log h) - i(\bar{g}-1)\frac{\Delta^0(\log h)}{4} \\
&= -i\bar{g}(g-1)(\bar{\partial}\log h)(\bar{\partial}\log h) - i\bar{g}(g-1)\frac{\Delta^0(\log h)}{4} \\
&= -i\bar{g}(g-1)\Big(|\bar{\partial}\log h|^2 - \frac{\Delta^0(\log h)}{4}\Big),
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\bar\partial\partial\theta &= \bar\partial\{i(g-1)\partial\log\bar h\} \\
&= i\partial\bar g(\partial\log\bar h) + i(g-1)\bar\partial\partial\log\bar h \\
&= ig\partial\theta(\partial\log\bar h) + i(g-1)\frac{\Delta^0(\log\bar h)}{4} \\
&= ig(\bar g-1)\partial\log h(\partial\log\bar h) + i(g-1)\frac{\Delta^0(\log\bar h)}{4} \\
&= -i(g-1)(\overline{\partial\log\bar h})(\partial\log\bar h) + i(g-1)\frac{\Delta^0(\log\bar h)}{4} \\
&= -i(g-1)\{|\partial\log\bar h|^2 - \frac{\Delta^0(\log\bar h)}{4}\}.
\end{aligned}$$

Όμως από τον κανόνα του Schwarz έπεται ότι

$$\partial\bar\partial\theta - \bar\partial\partial\theta = 0,$$

ισοδύναμα

$$-(1-\bar g)\{|\bar\partial\log h|^2 - \frac{\Delta^0\log h}{4}\} + (g-1)\{|\partial\log\bar h|^2 - \frac{\Delta^0\log\bar h}{4}\} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με $g$ προκύπτει

$$-(g-1)\{|\bar\partial\log h|^2 - \frac{\Delta^0\log h}{4}\} + g(g-1)\{|\partial\log\bar h|^2 - \frac{\Delta^0\log\bar h}{4}\} = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση $P(g)=0$, όπου

$$P(t) = t^2\{|\partial\log\bar h|^2 - \frac{1}{4}\Delta^0\log\bar h\} + t\Big(\frac{1}{4}(\Delta^0\log\bar h + \Delta^0\log h) - 2|\bar\partial\log h|^2\Big)$$
$$+|\bar\partial\log h|^2 - \frac{1}{4}\Delta^0\log h.$$

Εργαζόμενοι όμοια για τις ισομετρικές εμβαπτίσεις $f_1, f_3$, όπου $\Phi_3 = g_1\Phi_1$, προκύπτει ότι $P(g_1)=0$. Επίσης παρατηρούμε ότι $P(1)=0$. Έτσι στα σημεία όπου $1\neq g\neq g_1\neq 1$ το πολυώνυμο $P(t)$ είναι εκ ταυτότητας μηδέν και επομένως ισχύει $\Delta^0\log h = 4|\bar\partial\log h|^2$.

Επιπλέον, αν σε ένα πυκνό σύνολο $U$ ισχύει $1\neq g\neq g_1\neq 1$, τότε $\Delta^0\log h = 4|\bar\partial\log h|^2$ σε ολόκληρο το $U$. Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο πυκνό σύνολο. Πράγματι, αφού τα τετραγωνικά διαφορικά $\Phi_{12} = (1-g)\Phi_1$, $\Phi_{13} = (1-g_1)\Phi_1$ και $\Phi_{23} = (g-g_1)\Phi_1$ είναι ολόμορφα, τότε θα είναι εκ ταυτότητας μηδέν, ή οι ρίζες τους θα είναι μεμονωμένα σημεία. Εάν όμως για παράδειγμα είχαμε $\Phi_{12}=0$, τότε θα ίσχυε ότι $g=1$, το οποίο συνεπάγεται την ισοτιμία των $f_1, f_2$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα οι ρίζες τους είναι μεμονωμένα σημεία και το σύνολο $U$ είναι ένα πυκνό σύνολο. □

Ακολουθεί τώρα η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1.

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχουν τρεις ισομετρικές εμβαπτίσεις $f_i : M \to \mathbb{R}^3$, οι οποίες είναι ανά δύο μη ισότιμες, με αντίστοιχα διαφορικά του Hopf $\Phi_i = \varphi_i dz^2, i = 1, 2, 3$.

Είναι φανερό λόγω του Λήμματος 3.1.1, ότι κάθε ομφαλικό σημείο είναι θέση μηδενισμού του ολόμορφου τετραγωνικού διαφορικού $\Phi_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$. Άρα το σύνολο των ομφαλικών σημείων είναι πεπερασμένο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Psi : M \backslash M_1 \to \mathbb{C}$ με $\Psi = 1 - g = 1 - e^{i\theta}$, όπου $g = e^{i\theta}$, $\theta$ είναι η συνάρτηση ορισμένη $\mod 2\pi$ που ορίστηκε στην Πρόταση 3.1.2 και $M_1$ είναι το σύνολο των σημείων μηδενισμού του $\Phi_{12}$. Επειδή $\log \Psi = \log(\varphi_1 - \varphi_2) - \log \varphi_1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \Delta \log \Psi &= -\Delta \log \varphi_1 \\ &= -\frac{2}{E} \Delta^0 \log \varphi_1 \\ &= -\frac{8}{E} |\bar{\partial} \log \varphi_1|^2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

όπου $\Delta = \frac{2}{E}\Delta^0$, είναι η Λαπλασιανή του $M$. Συνεπώς από τη (3.11) και επειδή $\log \Psi = \log |\Psi| + i\text{arg}\Psi$, έπεται ότι

$$\Delta \log \Psi = \Delta \log |\Psi| + i\Delta\text{arg}\Psi \leq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\Delta \log |\Psi| \leq 0 \ \text{ και } \ \Delta\text{arg}\Psi = 0 \ \text{ στο } \ M \backslash M_1. \tag{3.12}$$

Εφόσον η $\Psi$ δεν μηδενίζεται στο $M \backslash M_1$, προφανώς και η $\theta$ δεν μηδενίζεται στο σύνολο αυτό.

Επιλέγουμε ένα συνεχή κλάδο $\theta : M \backslash M_1 \to (0, 2\pi)$. Επομένως υπάρχει ένας συνεχής κλάδος

$$\arg(\Psi(z)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tag{3.13}$$

εφόσον αποδυκνύεται ότι $\text{arg}\Psi = \theta/2 - \pi/2$. Από τις (3.12) και (3.13) προκύπτει ότι η $\text{arg}\Psi$ είναι αρμονική και φραγμένη στο $M \backslash M_1$. Άρα η $\text{arg}\Psi$ επεκτείνεται σε ολόκληρη την επιφάνεια, εφόσον τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται είναι μεμονωμένα και πεπερασμένα, ενώ από αρχή μεγίστου έπεται ότι είναι σταθερή. Από την έκφραση της $\Psi$ προκύπτει ότι $|\Psi(z) - 1| = 1$, το οποίο υποδηλώνει ότι οι τιμές της $\Psi$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο με κέντρο $(1, 0)$ και ακτίνα 1.

Από το γεγονός ότι η $\text{arg}\Psi$ είναι σταθερή, καταλήγουμε ότι και η $\Psi$ είναι σταθερή. Επακόλουθο αυτού είναι ότι το διαφορικό του Hopf, $\Phi_1$ είναι ολόμορφο. Με βάση το Λήμμα 3.1.1, η μέση καμπυλότητα της $f_1$ είναι σταθερή, το οποίο αντίκειται στην υπόθεση. Έτσι υπάρχουν το πολύ δύο μη ισότιμες ισομετρικές εμβαπτίσεις του $M$ στον $\mathbb{R}^3$. □

**Σχόλιο 3.2.4.** Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα, δηλαδή έχει γένος $g = 0$, υπάρχει το πολύ μία ισομετρική εμβάπτιση με μέση καμπυλότητα μία δοθείσα συνάρτηση. Πράγματι εάν υπήρχαν δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^3$, με $\Phi_1, \Phi_2$ τα αντίστοιχα διαφορικά του Hopf, τότε από το Λήμμα 3.2.2 θα ίσχυε ότι το τετραγωνικό διαφορικό $\Phi_{12}$ είναι ολόμορφο. Επομένως θα καταλήγαμε σε άτοπο σύμφωνα με το Θεώρημα Riemman-Roch [8].

## 3.3 Τοπικά $H$-παραμορφώσιμες συμπαγείς επιφάνειες

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.2.1, ότι κάθε επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα, η οποία δεν είναι ολικά ομφαλική, δέχεται τοπικά μία μη τετριμμένη $H$-ισομετρική παραμόρφωση.

Μία ισομετρική εμβάπτιση $f : M \to \mathbb{R}^3$ καλείται τοπικά $H$-παραμορφώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει περιοχή $U$ του $p$ και μη τετριμμένη $H$-παραμόρφωση της $f|U$.

Στην ενότητα αυτή σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα του Umehara [17], που αφορά συμπαγείς επιφάνειες γένους $g \geq 1$.

**Θεώρημα 3.3.1.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ είναι ένα συμπαγές και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης δύο με γένος $g \geq 1$. Τότε η $f$ είναι τοπικά $H$-παραμορφώσιμη αν και μόνο αν έχει σταθερή μέση καμπυλότητα.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξή του, θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά λήμματα. Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία τοπικά $H$-παραμορφώσιμη ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ είναι ένα συμπαγές και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης 2.

**Λήμμα 3.3.2.** *Τα ομφαλικά σημεία κάθε τοπικά $H$-παραμορφώσιμης ισομετρικής εμβάπτισης $f : M \to \mathbb{R}^3$ είναι μεμονωμένα.*

*Απόδειξη.* Έστω $f_t : U \to \mathbb{R}^3$ μία μη τετριμμένη $H$-παραμόρφωση της $f|_U$. Εάν $\Phi_t = \varphi_t dz^2$ είναι το διαφορικό του Hopf της $f_t$ και $\Phi = \varphi dz^2$ το διαφορικό του Hopf της $f$, ορίζουμε τη συνάρτηση $h_t = \varphi_t - \varphi$.

Η $h_t$ είναι ολόμορφη στο $U$ σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.2, ενώ λόγω του Λήμματος 3.1.1 μηδενίζεται σε κάθε ομφαλικό σημείο. Αφού η $h_t$ είναι ολόμορφη, είτε θα μηδενίζεται ταυτοτικά, είτε τα σημεία μηδενισμού της θα είναι μεμονωμένα. Όμως δεν είναι δυνατό να μηδενίζεται ταυτοτικά, διότι στην περίπτωση αυτή οι $f, f_t$ θα ήταν ισότιμες από την Πρόταση 3.1.2 και έτσι θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα τα ομφαλικά σημεία της $f|_U$, είναι μεμονωμένα. □

**Λήμμα 3.3.3.** *Έστω $p \in M$ είναι ένα ομφαλικό (μεμονωμένο) σημείο και $z = x + iy$ ισόθερμες συντεταγμένες με $z(p) = 0$. Τότε για την $\varphi$ ισχύει*

$$\varphi = \alpha z^r + o(|z|^{r+1}),$$

*όπου $\alpha \in \mathbb{C}$ και $r$ είναι ένας θετικός ακέραιος.*

*Απόδειξη.* Έστω $f_t : U \to \mathbb{R}^3$ μία μη τετριμμένη $H$-παραμόρφωση της $f$ και $(U, z)$ είναι ένας μιγαδικός χάρης γύρω από ένα σημείο $p$ της επιφάνειας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η $f_t$ είναι μία λεία $H$-παραμόρφωση της $f$ (όπως θα αποδειχθεί στο Λήμμα 3.3.4). Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi_t$, που ορίζεται από την $f_t$ και την $h_t = \varphi_t - \varphi$, που είδαμε στο Λήμμα 3.3.2. Εάν $p$ είναι ένα μεμονωμένο σημείο μηδενισμού της $h_t$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο $U$ τέτοιο ώστε $\varphi_t \neq \varphi$. Δηλαδή να θεωρήσουμε το σύνολο $U - \{p\}$.

Τότε για κάθε $q \in U - \{p\}$ υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\theta_t(q) \in (0, 2\pi)$, τέτοιος ώστε $\varphi_t(q) = \varphi(q)e^{i\theta_t(q)}$ και προφανώς η $\theta_t : U - \{p\} \to (0, 2\pi)$ να είναι μία λεία συνάρτηση. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2, εφόσον η $f_t$ είναι μία τοπική $H$-παραμόρφωση της $f$, για την συνάρτηση $\varphi_t$ ισχύει

$$\Delta^0 \log \varphi_t = 4|\bar{\partial} \log \varphi_t|^2. \tag{3.14}$$

Επιπλέον

$$\Delta \log \varphi_t = \Delta \log(\varphi e^{i\theta_t}) = \Delta \log \varphi + i\Delta\theta_t, \tag{3.15}$$

αλλά επειδή $\Delta = \frac{2}{E}\Delta^0$, προκύπτει

$$\Delta \log \varphi_t = \frac{2}{E}\Delta^0 \log \varphi_t = \frac{8}{E}|\bar{\partial} \log \varphi_t|^2,$$

ή αλλιώς

$$\Delta \log \varphi_t + i\Delta\theta_t \geq 0,$$

που ισοδυναμεί με

$$\Delta \log \varphi_t \geq 0 \ \text{ και } \ \Delta\theta_t = 0. \tag{3.16}$$

Από την σχέση (3.16) και όσα προαναφέραμε έπεται ότι η $\theta_t$ είναι μία φραγμένη και αρμονική συνάρτηση, όπου τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται είναι πεπερασμένα. Επομένως μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το $U$.

Στη συνέχεια παίρνουμε την $\partial B_\varepsilon(p)$, μία αρκούντως μικρή μπάλα ακτίνας $\varepsilon > 0$ με κέντρο το σημείο $p$. Εφόσον η $\theta_t(q)$ είναι λεία στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \partial B_\varepsilon(p)$, τότε σύμφωνα με τον τύπο Poisson για αρμονικές συναρτήσεις, θα είναι μια λεία συνάρτηση για $(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\varepsilon(p)$. Από την ολομορφία της $h_t$ προκύπτει ότι

$$\bar{\partial}(\dot{\theta}_t \varphi e^{i\theta_t}) = 0, \tag{3.17}$$

όπου $\dot{\theta}_t$ είναι η παράγωγος της $\theta_t$ ως προς $t$. Υποθέτουμε τώρα ότι όλες οι παράγωγοι της $\varphi$ μηδενίζονται, πράγμα που θα συμβαίνει και για τις παραγώγους της $\dot{\theta}_t \varphi e^{i\theta_t}$. Επομένως η $\dot{\theta}_t \varphi e^{i\theta_t}$ θα είναι ταυτοτικά μηδέν. Επειδή η $f_t$ είναι μη τετριμμένη $H$-παραμόρφωση της $f$, για κάποια $t$ θα ισχύει $\dot{\theta}_t \neq 0$ και έτσι η $\varphi$ θα είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν. Εάν όμως συνέβαινε αυτό, θα οδηγούμασταν σε άτοπο εφόσον θα ίσχυε ότι $\varphi = \varphi_t$, το οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.4 μας δίνει ότι οι $f_t, f$ είναι ισότιμες. Συνεπώς δεν μηδενίζονται όλες οι παράγωγοι της $\varphi$.

Θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor της $\varphi$ γύρω από το σημείο $p$, προκύπτει η έκφραση

$$\varphi = \sum_{\alpha+\beta=r} \gamma_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + o(|z|^{r+1}), \tag{3.18}$$

όπου $\sum_{\alpha+\beta=r} |\gamma_{\alpha\beta}| \neq 0$ και $r$ ένας θετικός ακέραιος. Εφόσον η $\dot{\theta}_t$ είναι μια πραγματική αρμονική συνάρτηση η οποία δεν μηδενίζεται παντού, το ανάπτυγμα Taylor αυτής θα είναι

$$\dot{\theta}_t = cz^l + \bar{c}\bar{z}^l + o(|z|^{l+1}), \tag{3.19}$$

όπου $l$ είναι ένας θετικός ακέραιος και $c \neq 0$. Από τις σχέσεις (3.18) και (3.19), προκύπτει ότι το ανάπτυγμα της $\dot{\theta}_t \varphi_t$ περιέχει μη μηδενικούς όρους που συμπεριλαμβάνουν την μεταβλητή $\bar{z}$, εκτός αν $l = 0$. Αφού η $\dot{\theta}_t \varphi e^{i\theta_t}$ είναι ολόμορφη, τότε πρέπει $l = 0$ και $\gamma_{\alpha\beta} = 0$, με $l \leq \beta \leq r$, ώστε να μηδενίζονται οι όροι αυτοί. Έτσι προκύπτει ότι $\varphi = \alpha z^r + o(|z|^{r+1})$, με $\alpha \in \mathbb{C}$ και $r$ έναν θετικό ακέραιο.

□

**Λήμμα 3.3.4.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μία ισομετρική εμβάπτιση ενός 2-διάστατου πολυπτύγματος Riemann στον $\mathbb{R}^3$. Τότε οι μη τετριμμένες $H$-παραμορφώσεις της $f$, δέχονται λεία αναπαραμέτρηση.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $U$ είναι μία απλά συνεκτική περιοχή του $M$ με μιγαδική συντεταγμένη $z$. Έστω $f_t : U \to \mathbb{R}^3$ μία μη τετριμμένη $H$-παραμόρφωση της $f$, με διαφορικό του Hopf $\Phi_t = \varphi_t dz^2$. Επειδή $\Phi = \varphi dz^2$ είναι το διαφορικό του Hopf της $f$, τότε από το Λήμμα 3.3.2, η συνάρτηση $h_t = \varphi_t - \varphi$ είναι ολόμρφη και έχει μεμονωμένα μηδενικά σημεία. Ορίζοντας όπως προηγουμένως $\varphi_t = e^{i\theta_t}\varphi$ στο σύνολο $U - h_t(0)^{-1}$, όπου με $h_t(0)^{-1}$ συμβολίζουμε τα σημεία που μηδενίζουν την $h_t$. Από την απόδειξη του Λήμματος 3.3.3 έπεται ότι η $h_t$ μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το $U$, εφόσον είναι μια αρμονική συνάρτηση, η οποία δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και $2\pi$ για κάθε $t \neq 0$. Άρα το σύνολο των ομφαλικών σημείων $M_0$ της $f$, συμπίπτει με το $h_t(0)^{-1}$ για κάθε $t$.

Έστω $q \in U \backslash M_0$ ένα μη ομφαλικό σημείο. Τότε για $s \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδική πραγματική και λεία συνάρτηση $\tilde{\theta}_s$ σε μία μικρή περιοχή γύρω από το $q$, τέτοια ώστε $\tilde{\theta}_s(q) = s$. Ορίζουμε και την συνάρτηση $\varphi_s = e^{i\tilde{\theta}_s}\varphi$, η οποία ικανοποιεί τις (3.1),(3.2) και διατηρεί την μέση καμπυλότητα $H$. Εφόσον το σημείο $q$ δεν είναι ομφαλικό, οποιοδήποτε μικρό $s$, με $|s| < \varepsilon$, μπορεί να γραφτεί ως $s = \theta_t(q)$ και λόγω συνέχειας θα ισχύει $\tilde{\theta}_s = \theta_t$.

Οπότε η συνάρτηση $\tilde{\theta}_s$, μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το $U$. Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, η $\tilde{\theta}_s : U \to \mathbb{R}$ είναι λεία στο σύνολο $U \backslash M_0$, ενώ εφόσον είναι αρμονική και το $M_0$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, έπεται ότι είναι λεία σε ολόκληρο το $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$. Επειδή η συνάρτηση $\varphi_s$ ικανοποιεί τις (3.1) και (3.2), οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Gauss και Godazzi, από το θεμελιώδες θεώρημα των επιφανειών, υπάρχει μία ισομετρική εμβάπτιση $f_s$ με δαφορικό του Hopf να είναι το $\Phi_s = e^{i\tilde{\theta}_s}\varphi dz^2$ και μέση καμπυλότητα η $H$. Συγκεκριμένα η αναπαραμέτρηση $f_s$ της $f$, είναι μία λεία $H$-παραμόρφωση της $f$. □

Ακολουθεί ο ορισμός του τελεστή Hodge που θα κάνουμε χρήση στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Έστω $\omega$ ένα μιγαδικό τανυστικό πεδίο τύπου $(1, 0)$. Εάν $(U, z)$ είναι ένας μιγαδικός χάρτης τότε $\omega = udz + vd\bar{z}$, όπου $u, v$ είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Ο τελεστής Hodge συμβολίζεται με $*$ και ορίζεται ως

$$*\omega = -iudz + ivd\bar{z}.$$

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1.

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ είναι τοπικά $H$-παραμορφώσιμη. Ο ακέραιος $r$ που ορίστηκε στο Λήμμα 3.3.3, είναι ο δείκτης στροφής γύρω από ένα σημείο μηδενισμού $p$ του διαφορικού Hopf $\Phi = \varphi dz^2$. Έτσι το άθροισμα όλων αυτών των ακεραίων γύρω από τα ομφαλικά σημεία της επιφάνειας είναι ίσο με $4(g-1)$. Από το Θεώρημα Riemann-Roch [8], γνωρίζουμε ότι υπάρχει ολόμορφο τετραγωνικό διαφορικό $\zeta$ της επιφάνειας, το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.

Έστω $p_1, p_2, \dots, p_n$ τα ομφαλικά σημεία της $f$ και $q_1, q_2, \dots, q_m$ τα σημεία μηδενισμού του $\zeta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\log f = \log \frac{\Phi}{\zeta}$, η οποία ορίζεται στο σύνολο $M \backslash \{p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m\}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} \Delta^0 \log f &= \Delta^0 \log \varphi - \Delta^0 \log \zeta^0 \\ &= \Delta^0 \log \varphi \\ &= 4|\bar{\partial} \log \varphi|^2, \end{aligned} \tag{3.20}$$

όπου $\zeta = \zeta^0 dz^2$ και $\zeta^0$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Για αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$, ορίζουμε το υποσύνολο

$$M_\varepsilon = M \backslash \{B_\varepsilon(p_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(p_n) \cup B_\varepsilon(q_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(q_m)\},$$

όπου $B_\varepsilon(p_i)$ είναι δίσκοι με κέντρο $p_i$ και ακτίνα $\varepsilon$ και παίρνουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{M_\varepsilon} \Delta \log f dM = \int_{M_\varepsilon} \frac{8}{E} |(\log \varphi)_{\bar{z}}|^2 dM, \tag{3.21}$$

όπου $\Delta = \frac{2}{E}\Delta^0$ είναι η Λαπλασιανή του $M$. Έχουμε

$$\begin{aligned} d \log f &= d \log \varphi - d \log \zeta^0 \\ &= \frac{1}{\varphi}\varphi_x dx + \frac{1}{\varphi}\varphi_y dy \\ &\quad -\frac{1}{\zeta^0}(\zeta^0)_x dx - \frac{1}{\zeta^0}(\zeta^0)_y dy. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Επειδή $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ και $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$, η (3.22) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} d \log f &= \frac{1}{\varphi}\varphi_x \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{1}{\varphi}\varphi_y \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ &\quad -\frac{1}{\zeta^0}(\zeta^0)_x \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) - \frac{1}{\zeta^0}(\zeta^0)_y \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{\varphi}\frac{1}{2}\{(\varphi_x - i\varphi_y)dz + (\varphi_x + i\varphi_y)d\bar{z}\} \\ &\quad -\frac{1}{\zeta^0}\frac{1}{2}\{(\zeta^0_x - i\zeta^0_y)dz + (\zeta^0_x + i\zeta^0_y)d\bar{z}\} \\ &= \frac{1}{\varphi}\varphi_z dz + \frac{1}{\varphi}\varphi_{\bar{z}} d\bar{z} - \frac{1}{\zeta^0}\zeta^0_z dz \\ &= (\frac{1}{\varphi}\varphi_z - \frac{1}{\zeta^0}\zeta^0_z)dz + \frac{1}{\varphi}\varphi_{\bar{z}} d\bar{z}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Όμως από την (3.23) και από τον ορισμό του τελεστή Hodge που προαναφέραμε προκύπτει

$$\begin{aligned} *d\log f &= -i(\frac{1}{\varphi}\varphi_z - \frac{1}{\zeta^0}\zeta^0_z)dz + i\frac{1}{\varphi}\varphi_{\bar z}d\bar z \\ &= -i\frac{1}{\varphi}\varphi_z dz + i\frac{1}{\varphi}\varphi_{\bar z}d\bar z + i\frac{1}{\zeta^0}\zeta^0_z dz. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.3.3, οι συναρτήσεις $\varphi$ και $\zeta^0$ έχουν την ακόλουθη έκφραση γύρω από το σημείο $p \in \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m\}$

$$\varphi = \alpha z^r + o(|z|^{r+1})$$

και

$$\zeta^0 = \beta z^l + o(|z|^{l+1}).$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Stokes και της σχέσης (3.24) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{M_\varepsilon} \Delta \log f dM &= \int_{M_\varepsilon} *d*d\log f \\ &= -\int_{M_\varepsilon} d(*d\log f) \\ &= -\int_{M_\varepsilon} *d\log f \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon(p_i)} *d\log f - \sum_{i=1}^{m}\int_{\partial B_\varepsilon(q_j)} *d\log f \\ &= i\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{\partial B_\varepsilon(p_i)} \frac{\varphi_z}{\varphi}dz - \int_{\partial B_\varepsilon(p_i)} \frac{\varphi_{\bar z}}{\varphi}d\bar z\Big) \\ &\quad -i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial B_\varepsilon(q_j)} \frac{d\zeta^0}{\zeta^0} \\ &= i\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{\partial B_\varepsilon(p_i)} \frac{\varphi_z}{\varphi}dz + \int_{\partial B_\varepsilon(p_i)} d(\log\varphi) - \frac{\varphi_z}{\varphi}dz\Big) \\ &\quad -i\sum_{j=1}^{m} 2\pi i l_j \\ &= i\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon(p_i)} \frac{d\varphi}{\varphi} + 2\pi(\mathrm{Index}\zeta) \\ &= i\sum_{i=1}^{n} 2\pi i r_i + 2\pi(\mathrm{Index}\zeta) \\ &= -2\pi\{(\mathrm{Index}\varphi) - (\mathrm{Index}\zeta)\}. \end{aligned}$$

Εύκολα προκύπτει

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon}\Delta\log f dM &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon} *d(\log f)\\ &= -2\pi\{4(g-1)-4(g-1)\}\\ &= 0\end{aligned}$$

Επομένως η (3.21) σε συνδυασμό με την προαναφερθείσα σχέση είναι ισοδύναμη με

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon}\frac{8}{E}|(\log\varphi)_{\bar z}|^2 = 0.$$

Έτσι έπεται ότι $|(\log\varphi)_{\bar z}|^2 = 0$, από το οποίο προκύπτει η ολομορφία της $\varphi$, άρα η μέση καμπυλότητα της επιφάνειας είναι σταθερή.

Το αντίστροφο προκύπτει εύκολα λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 2.1.1. □

# Βιβλιογραφια


[1] **A.I. Bobenko and M. Umehara**, *Monodromy of isometric deformation of CMC surfaces*, Hirochima Math J. **31** (2001), 291–297.

[2] **O. Bonnet**, *Memoire sur la theorie des surfaces applicables*, J. Ec. Polyt. **42** (1867), 72–92.

[3] **S.S. Chern**, *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 771–782.

[4] **S.S. Chern, W.H. Chern and K.S. Lam**, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, 2000.

[5] **S.S. Chern**, *Deformations of surfaces preserving principal curvatures*, Diff. Geom. and Complex Analysis, H. E. Rauch Memorial Volume, Springer (1985), 155–163.

[6] **A.G. Colares and K. Kenmotsu**, *Isometric deformations of surfaces preserving the mean curvature function*, Pasific J. Math. **136** (1989), 71–81.

[7] **P. do Carmo**, *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, (1976).

[8] **H.N. Farkas and I. Kra**, *Riemann surfaces*, Springer Verlag, (1980).

[9] **K. Kenmotsu**, *An intrinsic characterisation of H-deformable surfases*, J. London Math Soc. **49** (1994), 555–568.

[10] **Δ.Κουτρουφιώτης**, *Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, (1994).

[11] **H.B. Lawson and R. Tribuzy**, *On the mean curvature function for compact surfaces*, J. Differential Geom. **16** (1981), 179–183.

[12] **R. Munkres**, *Topology: a first course.* Prentice-Hall, Inc, (1975).

[13] **W. Scherrer**, *Die Grundgleichungen der Flächentheorie II*, Comm. Math. Helv. **32** (1957), 73–84.

[14] **B. Smyth and G. Tinaglia**, *The number of constant mean curvature isometric immersions of a surface*, Comment. Math. Helv. **88** (2013), 163–183.

[15] **R.Tribuzy**, *Hopf's method and deformations of surfaces preserving mean curvature*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **50** (1978), 447–450.

[16] **R.Tribuzy**, *A Characterisation of tori with constant mean curvature in a space Form*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **11** (1980), 259–274.

[17] **M. Umehara**, *A characterisation of compact surfaces with constant mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 483–489.

# Βιβλιογραφια