

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Βάγια Μαντέλα

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ
ΚΑΙ
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ
ΙΣΧΥΡΑ ΧΟΡΔΙΚΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2014

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα υπολογιστικά μαθηματικά και πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 27/11/2014 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
---------------	---------

Χάρης Παπαδόπουλος	Επίκουρος Καθηγητής
--------------------	---------------------

Νικόλαος Γλυνός	Επίκουρος Καθηγητής
-----------------	---------------------

Σωκράτης Μπαλτζής	Λέκτορας
-------------------	----------

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή. ”

Βάγια Μαντέλα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή σηματοδοτεί το πέρας των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές μου για την άριστη συνεργασία που είχαμε όλο αυτό τον καιρό καθώς και για όλα όσα μου μετέδωσαν.

Επίσης, ευχαριστώ ξεχωριστά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Χάρη Παπαδόπουλο για τη συνεργασία, την καθοδήγηση και τη μεταδοτικότητα του. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής για την παρούσα εργασία, τους καθηγητές κ.Γλυνό και κ.Μπαλτζή, για τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση και στη διόρθωση της εργασίας μου.

Τελευταίους σε σειρά, αλλά πρώτους σε σημασία, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, οι οποίοι είναι κοντά μου από τις πρώτες στιγμές της ζωής μου μέχρι σήμερα. Η πολύπλευρη προσφορά τους δεν μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί αφού δεν οριοθετείτε με κανενός είδους χριτήριο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα διατριβή μελετάμε την κλάση των ισχυρά χορδικών γραφημάτων (strongly chordal graphs) που αποτελεί υποκλάση των γνωστών χορδικών γραφημάτων (chordal graphs) και υπερκλάση των τμηματικών γραφημάτων (interval graphs). Τα γραφήματα αυτά βρίσκουν ποικίλες εφαρμογές καθώς επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο προβλήματα που σε γενικά γραφήματα είναι NP -δύσκολα. Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών με αποδοτικό τρόπο, χρησιμοποιούνται αναπαραστάσεις των γραφημάτων οι οποίες βασίζονται στις δομικές ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν.

Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε αναπαραστάσεις σχετικές με την κλάση των χορδικών και των ισχυρά χορδικών γραφημάτων. Επεκτείνοντας μια αναπαράσταση για τα χορδικά γραφήματα, παρουσιάζουμε μια νέα αναπαράσταση για τα ισχυρά χορδικά γραφήματα που χαρακτηρίζει πλήρως τα γραφήματα αυτά. Επιπρόσθετα μελετάμε μέσα από την σκοπιά των δυναμικών αλγορίθμων αναγνώρισης την δυνατότητα αποτελεσματικής αναγνώρισης και αναπαράστασης όταν διαγράφουμε μια ακμή από ένα ισχυρά χορδικό γράφημα. Δίνουμε έναν νέο δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης που τρέχει σε $O(n)$ χρόνο για να αναγνωρίσει αν ένα ισχυρά χορδικό γράφημα με n κορυφές και m ακμές παραμένει ισχυρά χορδικό μετά την διαγραφή κάποιας ακμής. Επίσης αν το γράφημα που προκύπτει μετά την διαγραφή ακμής παραμένει ισχυρά χορδικό τότε ο αλγόριθμος σε χρόνο $O(n \log n)$ ενημερώνει κατάλληλα την αναπαράσταση του γραφήματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο αλγόριθμος που παρουσιάζουμε για την διαγραφή ακμής είναι ο πρώτος που έχει δοθεί από την σκοπιά των δυναμικών αλγορίθμων αναγνώρισης για την κλάση των ισχυρά χορδικών γραφημάτων και είναι σαφώς πιο γρήγορος από τους γνωστούς αλγορίθμους αναγνώρισης που δεν είναι δυναμικοί και εκτελούνται σε χρόνο $O(\min\{n^2, m \log n\})$.

ABSTRACT

In this thesis, we study the class of strongly chordal graphs which forms a subclass of the well-known class of chordal graphs and a superclass of the class of interval graphs. These graphs find various applications as many important graph problems that are *NP*-hard in general graphs, admit polynomial solutions when restricted to such graphs. In order to solve these problems efficiently, it is commonly helpful to use representations of graphs that are based on structural properties that characterize the graphs.

More precisely, we study representations related to the class of chordal graphs and strongly chordal graphs. Extending an already-known representation for chordal graphs, we present a new representation for strongly chordal graphs and characterizes completely such graphs. Moreover we study through the perspective of dynamic recognition algorithms, the design of an efficient graph recognition algorithm that properly maintains its representation when we delete an edge from a strongly chordal graph. We give a new dynamic recognition algorithm that runs in $O(n)$ time to recognize if a strongly chordal graph with n vertices and m edges given by its unique representation remains strongly chordal after deleting an edge. Also if the resulting graph after the edge deletion remains strongly chordal then the algorithm in $O(n \log n)$ properly updates the representation of the graph. It is worth noting that our proposed algorithm for the edge deletion is the first one that has been given as a dynamic recognition algorithm for the class of strongly chordal graphs being substantially faster than the existed graph recognition algorithms that work in an offline fashion and run in $O(\min\{n^2, m \log n\})$ time.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	i
Abstract	ii
1 Εισαγωγικές έννοιες θεωρίας γραφημάτων	3
1.1 Εισαγωγικές έννοιες	3
1.2 Ειδικά γραφήματα	4
1.3 Πράξεις γραφημάτων	7
1.4 Δέντρα	8
2 Κλάσεις Γραφήματων και αναπαραστάσεις	11
2.1 Κλάσεις Γραφήματων	11
2.2 Αναπαραστάσεις	14
2.2.1 Clique tree	14
2.2.2 Clique separator	17
2.2.3 Clique arrangement	22
2.3 Αναπαράσταση strongly chordal γραφημάτων με clique separator	25
3 Αλγόριθμοι Αναγνώρισης	27
3.1 Κλασικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης	27
3.2 Δυναμικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης	27
4 Διαγραφή ακμής	31

4.1	Διαγραφή ακμής σε chordal γραφήματα	31
4.1.1	Διαγραφή ακμής σε clique tree	31
4.1.2	Διαγραφή και Ενημέρωση του clique tree	33
4.2	Διαγραφή ακμής σε strongly chordal γραφήματα	35
4.2.1	Διαγραφή ακμής μέσω clique separator	35
5	Συμπεράσματα-Επεκτάσεις	43
5.1	Συμπεράσματα	43
5.2	Επεκτάσεις-Ανοιχτά προβλήματα	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1.1 Εισαγωγικές εννοιές

Ένα γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$, όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο που το καλούμε σύνολο κορυφών (ή σύνολο κομβών) και E είναι ένα σύνολο από διμελή σύνολα κορυφών τα οποία εκφράζουν τις ακμές του γραφήματος. Για κάθε ακμή e του E υπάρχουν δύο άκρα (ή τερματικά σημεία). Αν τα άκρα της e είναι οι κορυφές u και v τότε γράφουμε $e = \{u, v\}$ και θα λέμε ότι οι κορυφές u και v είναι γειτονικές ή ισοδύναμα ότι συνδέονται μεταξύ τους με ακμή. Το γράφημα με καμία κορυφή (και καμία ακμή) ονομάζεται τετριμμένο. Ως $V(G)$ και $E(G)$ συμβολίζουμε τα σύνολα των κορυφών και ακμών, αντίστοιχα. Το πλήθος των κορυφών του γραφήματος συμβολίζεται με n ενώ το πλήθος των ακμών συμβολίζεται με m . Δηλαδή, $n = |V(G)|$ και $m = |E(G)|$. Η τάξη και το μέγεθος ενός γραφήματος αναφέρονται στις ποσότητες n και m αντίστοιχα.

Για μια κορυφή $v \in V(G)$ καλούμε την γειτονιά του v το σύνολο των κορυφών που συνδέεται η v με ακμή. Πιο συγκεκριμένα η γειτονιά της v συμβολίζεται ως $N(v)$ και $N(v) := \{u \mid \{v, u\} \in E(G)\}$. Γενικεύουμε την έννοια της γειτονιάς μιας κορυφής στην γειτονιά ενός συνόλου κορυφών $S \subseteq V(G)$ ως εξής:

$$N(S) := \bigcup_{v \in S} N(v) \setminus S.$$

Η κλειστή γειτονιά της κορυφής v ορίζεται ως $N[v] := N(v) \cup v$. Αν για μια κορυφή $v \in V(G)$ ισχύει $N(v) = \emptyset$ τότε v ονομάζεται απομονωμένη, ενώ αν $N[v] := V(G)$ τότε λέμε ότι η v είναι καθολική.

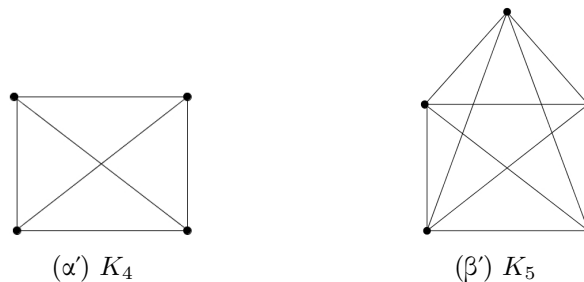
Για μια ακμή $e \in E(G)$ με $e = \{u, v\}$ οι κορυφές u και v καλούνται άκρα της e και επίσης λέμε ότι η ακμή e προσπίπτει στις κορυφές u και v (δηλαδή “ακουμπάει”

τις u, v). Όταν ισχύει $u = v$ τότε η ακμή λέγεται βρόγχος. Αν δύο ακμές έχουν τα ίδια άκρα τότε ονομάζονται παράλληλες. Γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές ή βρόγχους λέγονται απλά.

1.2 Ειδικά γραφήματα

Ορισμός 1.1. Το γράφημα με $n \geq 1$ κορυφές και ακμές για κάθε ζεύγος κορυφών το ονομάζουμε πλήρες γράφημα ή κλίκα. Το συμβολίζουμε με K_n και θα ισχύει:

$$K_n = \{\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_i, v_j | 1 \leq i, j \leq n\}\}.$$



Σχήμα 1.1: Δύο κλίκες

Λήμμα 1.1. Ένα γράφημα G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν περιέχει περίπατο που να περνάει από όλες τις κορυφές του G .

Ορισμός 1.2. Σε ένα συνδεδεμένο γράφημα G , διαχωριστής είναι ένα υποσύνολο S των κορυφών τέτοιο ώστε το $G - S$ να μην είναι συνεκτικό.

Ορισμός 1.3. Ο S είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής (*minimal separator*) στο G αν ο S είναι ένας διαχωριστής στο G που δεν περιέχει κανένα άλλο διαχωριστή του G .

Ορισμός 1.4. Για $u, v \in V$, ο S είναι ένας uv -διαχωριστής του G , αν οι u, v είναι συνδεδεμένοι στο G και όχι στο $G - S$.

Ορισμός 1.5. Ο S καλείται ελαχιστοτικός διαχωριστής-κόμβων (*minimal vertex separator*) του G αν για κάποια $u, v \in V$, ο S είναι ένας uv -διαχωριστής του G και δεν περιέχει κανένα uv -διαχωριστή του G .

Ορισμός 1.6. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Μια κλίκα K λέγεται *μεγιστοτική* αν δεν περιέχεται σε οποιαδήποτε άλλη κλίκα ή ισοδύναμα, αν δεν υπάρχει κόμβος που να ανήκει στο σύνολο $V - K$ και να είναι γειτονικός σε κάθε κόμβο του K . Συμβολίζουμε με K_G το σύνολο των μεγιστοτικών κλίκων του G .

Ορισμός 1.7. Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ καλείται *μονοπάτι*. Το γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που ορίζεται ως

$$P_n = \{\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_i, v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\}\}$$

καλείται *άχορδο μονοπάτι*. Τα άκρα του μονοπατιού είναι οι κορυφές v_1, v_n και οι υπόλοιπες κορυφές καλούνται *εσωτερικές*. Το (x, y) -μονοπάτι ενός γραφήματος είναι το μονοπάτι εκείνο με άκρα τις κορυφές x και y του γραφήματος.

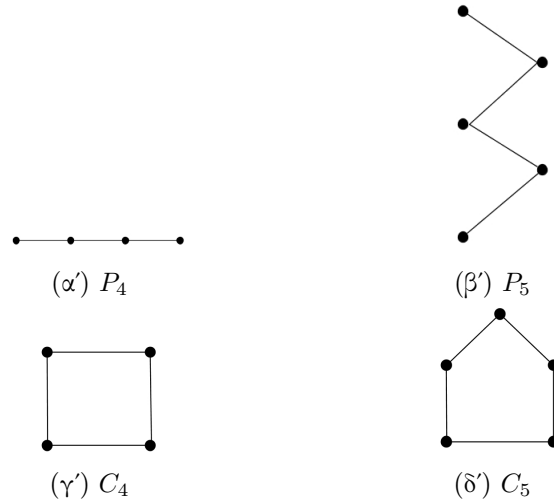
Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \cup \{v_1, v_n\} \in E(G)$ καλείται *κύκλος*. Το γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές που ορίζεται ως

$$C_n = \{\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_i, v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_1, v_n\}\}$$

καλείται *άχορδος κύκλος*. Το γράφημα C_3 καλείται *τρίγωνο* και είναι ισόμορφο με την κλίκα K_3 . Το μήκος του κύκλου C_n ορίζεται ως το πλήθος των ακμών, δηλαδή n .

Είναι σημαντική η διαφορά ανάμεσα στα μονοπάτια (κύκλους) και τα άχορδα μονοπάτια (άχορδους κύκλους). Κάθε άχορδο μονοπάτι (ή άχορδος κύκλος) είναι μονοπάτι (ή κύκλος) αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Η σημαντική διαφορά εγκρίνεται στο γεγονός ότι σε ένα μονοπάτι μπορεί να υπάρχουν ακμές μεταξύ μη-συνεχόμενων κορυφών v_i, v_{i+1} ενώ στο άχορδο μονοπάτι δεν επιτρέπονται τέτοιες ακμές. Αντίστοιχα, στον κύκλο μπορεί να υπάρχουν ακμές μεταξύ μη-συνεχόμενων κορυφών v_i, v_{i+1} και του ζεύγους v_i, v_n .

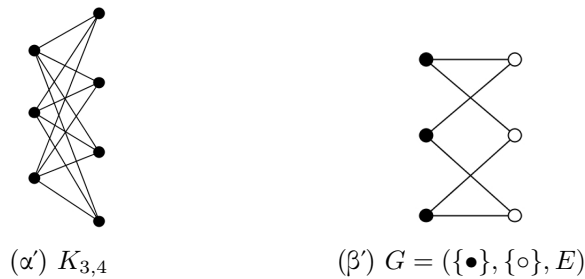
Παραδείγματα μονοπατιών και κύκλων παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Ορισμένα μονοπάτια και κύκλοι.

Ορισμός 1.8. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται διμερές αν μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο $V(G)$ σε δύο μη-κενά σύνολα, $V(G) = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και για κάθε ακμή $e = \{x, y\} \in E(G)$, $x \in A$ και $y \in B$. Τα σύνολα A, B ονομάζονται διαμέριση του G και συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα ως μια τριάδα, $G = (A, B, E)$.

Με άλλα λόγια, δεν υπάρχουν ακμές σε ένα διμερές γράφημα που να έχουν και τα δύο άκρα τους σε μια από τις δύο διαμερίσεις. Ένα διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$ καλείται πλήρες διμερές αν για κάθε $x \in A$ και για κάθε $y \in B$ υπάρχει η ακμή $\{x, y\} \in E(G)$ θα συμβολίζουμε το πλήρες διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$ με $K_{p,q}$, όπου $p = |A|$ και $q = |B|$. Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 1$ το γράφημα $K_{1,q}$ καλείται αστέρα.



Σχήμα 1.3: Ορισμένα διμερή γραφήματα.

Παραδείγματα διμερών γραφημάτων φαίνονται στο Σχήμα 1.3. Ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των διμερών γραφημάτων θεωρείται από τους πιο γνωστούς στη θεωρία γραφημάτων.

Λήμμα 1.2. Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

1.3 Πράξεις γραφημάτων

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ορισμένες πράξεις μεταξύ γραφημάτων.

Ορισμός 1.9. Το συμπλήρωμα του γραφήματος $G = (V, E)$ ορίζεται ως

$$\bar{G} = (V(G), \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G) \text{ και } \{u, v\} \notin E(G)\})$$

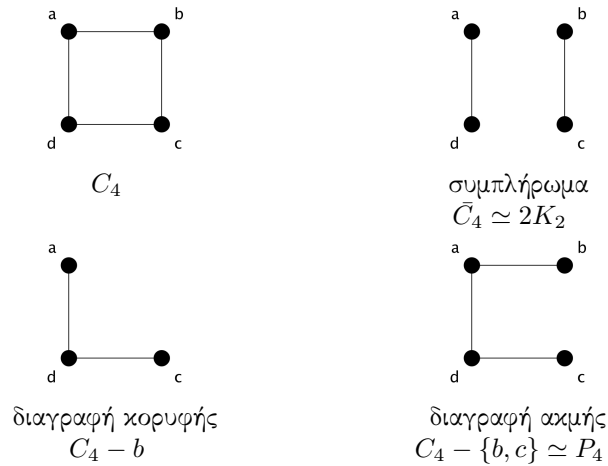
Δηλαδή, το συμπλήρωμα ενός γραφήματος έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το G και ακριβώς εκείνες τις ακμές που δεν υπάρχουν στο G .

Παρατήρηση 1.1. Για κάθε γράφημα G , ισχύει $\bar{\bar{G}} \simeq G$.

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω $v \in V(G)$. Η πράξη της διαγραφής κορυφής v έχει ως αποτέλεσμα το γράφημα που προκύπτει από την διαγραφή της v από το σύνολο κορυφών και την διαγραφή των ακμών που είναι προσκείμενες στην v . Συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει ως $G - v$ και θα ισχύει,

$$G - v = \{V \setminus \{v\}, E(G) \setminus \{u, v\} \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Για μια ακμή $e \in E(G)$ η διαγραφή ακμής αναφέρεται στην διαγραφή της από το σύνολο ακμών και θα συμβολίζουμε το γράφημα ως $G - e$. Επεκτείνουμε τις πράξεις των διαγραφών κορυφών και ακμών σε σύνολα από κορυφές και ακμές με τον προφανή τρόπο. Αν $S \subseteq V(G)$ τότε θα γράφουμε $G \setminus S$ για την διαγραφή όλων των κορυφών του S . Αντίστοιχα αν $E \subseteq E(G)$ τότε θα γράφουμε $G \setminus E$ για την διαγραφή όλων των ακμών του E .



Σχήμα 1.4: Οι πράξεις του συμπληρώματος, της διαγραφής κορυφής/ακμής

Ορισμός 1.10. Υπογράφημα ονομάζεται το γράφημα που προκύπτει αν από το αρχικό γράφημα αφαιρέσουμε κάποιες κορυφές (με όλες τις ακμές που προσπίπτουν σ'αυτές) και κάποιες ακμές.

Ορισμός 1.11. Επαγόμενο ονομάζεται το υπογράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από ένα γράφημα κάποιες κορυφές και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σ'αυτές, αλλά όχι ακμές.

1.4 Δέντρα

Ορισμός 1.12. Ένα γράφημα ονομάζεται δάσος ή άκυκλο αν δεν περιέχει κύκλους.

- Ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα καλείται δέντρο.
- Μια κορυφή ενός δέντρου με βαθμού 1 (εκκρεμής) ονομάζεται φύλλο.

Θεώρημα 1.1. Ένα γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του G συνδέεται με ένα μονοδικό μονοπάτι.

Ορισμός 1.13. Ριζωμένο δέντρο (rooted) καλείται το δέντρο που ένας κόμβος ορίζεται ως η ρίζα.

Ορισμός 1.14. Κατευθυνόμενο δέντρο ονομάζεται το δέντρο, όπου δύο κόμβοι $u, v \in T$ συνδέονται μεταξύ τους αν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι που να τους

ενώνει. Οι ακμές σ' αυτό το δέντρο είναι κατευθυνόμενες. Η μετάβαση από ένα κόμβο x σε ένα γειτονικό του y δεν συνεπάγεται και το αντίστροφο. Ανάλογα συμβαίνει για τον y .

Κεφάλαιο 1.

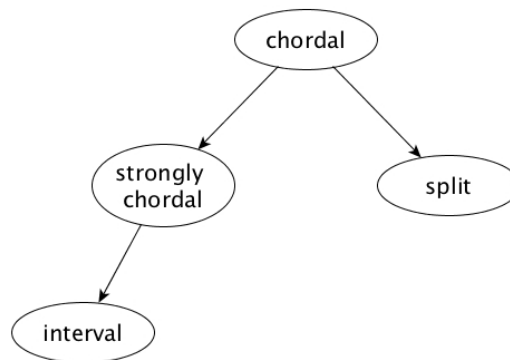
1.4. Δέντρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΛΑΣΕΙΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.1 Κλάσεις Γραφήματων

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο συσχετισμός ορισμένων κλάσεων γραφημάτων που θα μελετήσουμε. Οι ορισμοί τους θα δοθούν στη συνέχεια.



Σχήμα 2.1

Κάθε βελάκι ($\rightarrow$) στο Σχήμα 2.1 δηλώνει τη σχέση που έχουν οι δύο κλάσεις που ενώνει. Η κλάση από την οποία ξεκινά, είναι μια υπερκλάση αυτής στην οποία καταλήγει. Για παράδειγμα, strongly chordal γραφήματα $\subseteq$ chordal γραφήματα, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μπορούμε να γενικεύσουμε κατά κάποιο τρόπο τη συσχέτιση θεωρώντας ότι κάθε κλάση γραφημάτων που βρίσκεται σε κάποιο κατώτερο επίπεδο αποτελεί

υποσύνολο όσων βρίσκονται πιο ψηλά “ιεραρχικά” στο Σχήμα.

Ορισμός 2.1. Ένα γράφημα ονομάζεται χορδικό (*chordal*) αν δεν έχει άχορδους κύκλους μήκους τουλάχιστον 4. Δηλαδή, δεν περιέχει $C_4, C_5, \dots$. Για παράδειγμα ένα οποιοδήποτε δέντρο είναι ένα *chordal* γράφημα.

Ορισμός 2.2. Ένας κόμβος σε ένα γράφημα καλείται *simplicial* αν η γειτονιά του είναι μια κλίκα.

Λήμμα 2.1. Κάθε *chordal* γράφημα G έχει ένα *simplicial* κόμβο.

Ορισμός 2.3. *Perfect elimination order* καλείται η σειρά με την οποία αφαιρούμε *simplicial* κορυφές από ένα *chordal* γράφημα αν τις αφαιρέσουμε μία μία έως ότου δεν απομείνει καμία στο γράφημα. Κάθε φορά που βγάζουμε μια τέτοια κορυφή, αν το γράφημα είναι *chordal* θα υπάρχει μία νέα κ.ο.κ. Σε διαφορετική περίπτωση δεν είναι *chordal*.

Η κατασκευή της *perfect elimination order* αποτελεί στην ουσία έναν αλγόριθμο αναγνώρισης για *chordal* γραφήματα λόγω της ακόλουθης γνωστής ιδιότητας.

Θεώρημα 2.1 ([11]). Ένα γράφημα είναι *chordal* αν και μόνο αν έχει μια *perfect elimination order*.

Θεώρημα 2.2 ([8]). Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και έστω K_v το σύνολο των μεγιστοτικών κλικών που περιέχουν την κορυφή v του G . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) το G είναι *chordal*,
- (ii) το G είναι το *intersection* γράφημα μιας οικογένειας υποδέντρων ένος δέντρου,
- (iii) υπάρχει ένα δέντρο $T = (K, \mathcal{E})$ που το σύνολο κορυφών του είναι το σύνολο των μεγιστοτικών κλικών του G , έτσι ώστε κάθε επαγόμενο υπογράφημα $T[K_v]$ είναι συνδεδεμένο.

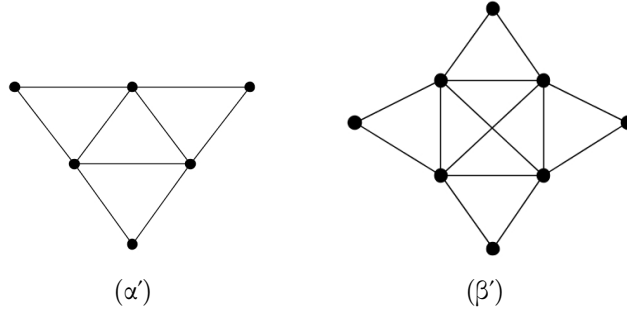
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μία υποκλάση των *chordal* γραφημάτων γνωστή ως ισχυρά χορδικά γραφήματα (*strongly chordal*). Θα χρειαστούμε πρώτα τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.4. Μια *strong elimination ordering* ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια διάταξη των κορυφών $v_1, \dots, v_n$ του V έτσι ώστε για κάθε i, j, k, l με $i \leq k$ και $i < l$, αν $i < j$, $k < l$, $v_1 v_k, v_i v_l \in E$ και $v_j v_k \in E$ τότε $v_j v_l \in E$.

Ορισμός 2.5. Ένα γράφημα καλείται *strongly chordal* αν έχει μία *strong elimination ordering*.

Τα γράφηματα αυτά χαρακτηρίζονται από την απουσία των άχορδων κύκλων και των εξής γραφημάτων:

Ορισμός 2.6. Ένα k – *sun* (γνωστό και ως *trampoline*) για $k \geq 3$, είναι το γράφημα με $2k$ κορυφές που αποτελείται από μια κλίκα $\{c_1, \dots, c_k\}$ με k κορυφές και ένα ανεξάρτητο σύνολο $\{s_1, \dots, s_k\}$ με k κορυφές και ακμές $s_i c_i, s_i c_{i+1}, 1 \leq i < k$ και $s_k c_k, s_k c_1$.



Σχήμα 2.2

Στο Σχήμα 2.2(α') βλέπουμε ένα 3 – *sun* ενώ στο Σχήμα 2.2(β') ένα 4 – *sun*.

Θεώρημα 2.3 ([5]). Ένα *chordal* γράφημα είναι ισχυρά χορδικό (*strongly chordal*) αν και μόνο αν δεν περιέχει ένα k – *sun* σαν επαγόμενο υπογράφημα.

Υπάρχουν και άλλες υποκλάσεις χορδικών γραφημάτων. Για λόγους πληρότητας θα αναφερθούμε σε ορισμένες από αυτές.

Ορισμός 2.7. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται *interval* αν υπάρχει μια απεικόνιση I των κορυφών του G σε ένα σύνολο διαδοχικών ακεραίων έτσι ώστε για κάθε ζευγάρι κορυφών $v, w \in V$ ισχύει: $(v, w) \in E \Leftrightarrow I(v) \cap I(w) \neq \emptyset$.

Είναι γνωστό [3] [18] [17] ότι κάθε *interval* γράφημα είναι και *strongly chordal*, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ορισμός 2.8. Ένα γράφημα G είναι ένα *split* γράφημα αν οι κορυφές του G μπορούν να διαμεριστούν σε μια κλίκα και ένα ανεξάρτητο σύνολο.

Ένα παράδειγμα ενός split γραφήματος είναι τα k -sun. Αυτό δείχνει ότι οι κλάσεις των strongly chordal γραφημάτων και των split γραφημάτων είναι ξένες μεταξύ τους.

Λήμμα 2.2 ([3]). Ένα γράφημα είναι *split* αν και μόνο αν δεν περιέχει C_4 , C_5 , $2K_2$.

Λήμμα 2.3 ([3]). Ένα γράφημα G είναι *split* αν και μόνο αν τα G και $\bar{G}$ είναι *chordal*.

2.2 Αναπαραστάσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ειδικές αναπαραστάσεις των χορδικών γραφημάτων.

2.2.1 Clique tree

Ένα δέντρο με την ιδιότητα που περιγράφηκε στο Θεώρημα 2.2 (iii) καλείται *clique tree* του G . Συγκεκριμένα είναι το δέντρο που οι κόμβοι του αναπαριστούν τις μεγιστοτικές κλίκες και οι ακμές του αναπαριστούν τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές του γραφήματος.

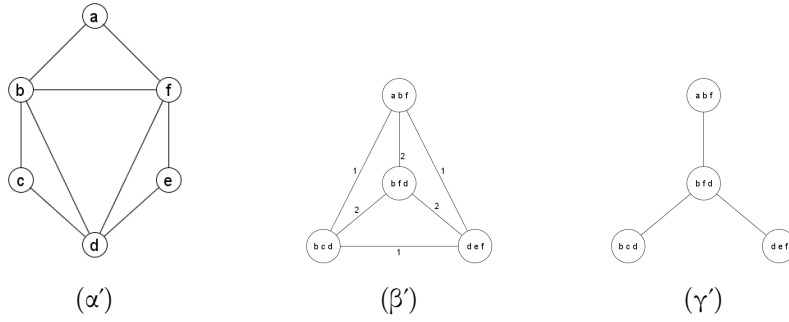
Το πρόβλημα της εύρεσης όλων των μεγιστοτικών κλικών ενός γενικού γραφήματος είναι *NP-hard*. Όμως, για chordal γραφήματα ο αριθμός των μεγιστοτικών κλικών είναι το πολύ $|V|$ και γι'αυτά μπορεί να βρεθεί σε γραμμικό χρόνο με μία τροποποίηση της Maximum Cardinality Search (MCS) [24].

Ένα γενικό γράφημα μπορεί να έχει πολλούς ελαχιστοτικούς διαχωριστές. Όμως, για τα συνδεδεμένα chordal γραφήματα ο αριθμός των ελαχιστοτικών διαχωριστών είναι το πολύ $|V| - 1$. Το clique tree είναι μία χρήσιμη δομή για να εκφράσουμε της πληροφορίες των μεγιστοτικών κλικών και των ελαχιστοτικών διαχωριστών ενός chordal γραφήματος.

Ορισμός 2.9. Το *clique* γράφημα ενός chordal γραφήματος G είναι ένα γράφημα $\mathcal{G}$ του οποίου οι κορυφές είναι οι κλίκες του G και δύο κορυφές συνδέονται με μία ακμή αν οι αντίστοιχες κλίκες επικαλύπτονται στο G .

Παράδειγμα 2.1. Έστω G το γράφημα που δίνεται στο Σχήμα 2.3. Το *clique* γράφημα $\mathcal{G}$ του G δίνεται στο Σχήμα 2.3(β'), και ένα *clique tree*, το οποίο για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι μοναδικό, δίνεται στο Σχήμα 2.3(γ'). Οι αριθμοί

στις ακμές στο *clique* γράφημα είναι τα βάρη των ακμών, δηλαδή το πλήθος των κοινών στοιχείων.



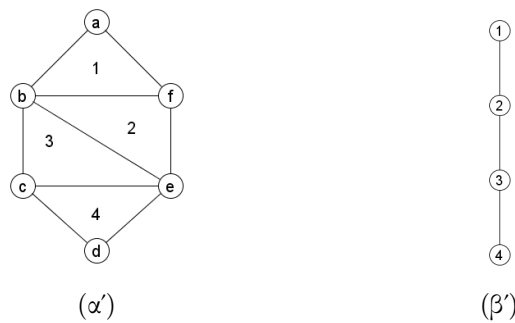
Σχήμα 2.3

Θεώρημα 2.4 ([3]). Ένα γράφημα είναι *chordal* αν και μόνο αν έχει ένα τουλάχιστον *clique tree*.

Σημειώνουμε ότι σε ένα χορδικό γράφημα το *clique tree* δεν είναι μοναδικό.

Θεώρημα 2.5 ([9]). Το G είναι ένα *interval* γράφημα αν και μόνο αν το G έχει ένα *clique tree* το οποίο είναι ένα απλό μονοπάτι.

Παράδειγμα 2.2. Έστω G το γράφημα που φαίνεται στο Σχήμα 2.4(α'). Ένα *clique tree* T του G δίνεται στο Σχήμα 2.4(β'). Για να δούμε ότι το G είναι ένα *interval* γράφημα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη αντιστοίχιση I : $I(a) = \{1\}$, $I(b) = \{1, 2, 3\}$, $I(c) = \{3, 4\}$, $I(d) = \{4\}$, $I(e) = \{2, 3, 4\}$, $I(f) = \{1, 2\}$.



Σχήμα 2.4

Θεώρημα 2.6 (Ho και Lee [1989] Lundquist [1990]). Έστω G ένα συνδεδεμένο chordal γράφημα. Έστω T κάποιο clique tree του G .

- (1) Ένα σύνολο S είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής κόμβων του G αν και μόνο αν $S = K_x \cap K_y$ για κάποια $\{x, y\} \in E(T)$.
- (2) Αν $S = K_x \cap K_y$ για κάποια $\{x, y\} \in E(T)$, τότε ο S είναι ένας ελαχιστοτικός uv -διαχωριστής για οποιαδήποτε $u \in K_x - S$ και $v \in K_y - S$.

Έτσι κάθε clique tree του G έχει κόμβους και κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν στις μεγιστοτικές κλίκες και στους ελαχιστοτικούς διαχωριστές κορυφών αντίστοιχα. Για παράδειγμα, έστω το clique tree του Σχήματος 2.4. Αν $S = K_x \cap K_y = \{c, d\}$, τότε ο S είναι ένας uv -διαχωριστής για κάθε $u \in V_x = \{a, b\}$ και $v \in V_y = \{e, f, g\}$ και ο S είναι ένας ελαχιστοτικός uv -διαχωριστής για κάθε $u \in K_x - S$ και $v \in K_y - S$.

Ένα chordal γράφημα έχει το πολύ n μεγιστοτικές κλίκες, έτσι το clique tree του έχει το πολύ n κόμβους. Υπάρχουν αλγόριθμοι που υπολογίζουν αν ένα γράφημα G είναι chordal και αν είναι, υπολογίζουν τις μεγιστοτικές κλίκες του G και ένα clique tree T του G . Οι Tarjan και Γιαννακάκης [1984] έδωσαν τον πρώτο αλγόριθμο σε χρόνο $O(m + n)$ στην εργασία τους που αφορούσε άκυκλα υπεργραφήματα για συσχετιζόμενες βάσεις δεδομένων. Οι Lewis κ.α. [1989] έδωσαν έναν αλγόριθμο σε χρόνο $O(n + m)$ βασιζόμενο στον υπολογισμό αραιών πινάκων. Ενώ οι Blair και Peyton [1993] περιέγραψαν ένα $O(n + m)$ αλγόριθμο με θεματολογία στη θεωρία γραφημάτων.

Οι περισσότερες μελέτες πάνω σε chordal γραφήματα, όπως αυτές των Blair, Peyton και Lewis κ.α., αναφέρονται σε συνεκτικά γραφήματα, μιας και τα μη συνεκτικά μπορούμε εύκολα να τα διαχειριστούμε αν εφαρμόσουμε σε κάθε συνδεδεμένο τμήμα τα παραπάνω αποτελέσματα. Για να καταφέρουμε να διατηρήσουμε το clique tree του γραφήματος με ένα μονοδικό τρόπο στον δυναμικό αλγόριθμο, επεκτείνουμε τους ορισμούς ως εξής: Έστω G ένα μη συνεκτικό chordal γράφημα και έστω $T_1, T_2, \dots, T_k$ τα clique trees των συνδεδεμένων τμημάτων του G , $k > 1$. Έστω x και y κόμβοι διαφορετικών T_i , έτσι ώστε K_x και K_y να περιέχονται σε διαφορετικά τμήματα του G . Αν $K_x \cap K_y = \emptyset$ και $\{x, y\}$ δεν είναι ακμή, τότε θα λέμε την ακμή αυτή “περιττή” και θα έχει βάρος $w(x, y) = 0$. Ενώνουμε τα $T_1, T_2, \dots, T_k$ με περιττές ακμές, ώστε να φτιάξουμε ένα δέντρο T που να ικανοποιεί τις ιδιότητες του επαγόμενου υποδέντρου και της επικάλυψης κλικών. Επεκτείνουμε το W_G προσθέτοντας όλες τις “περιττές” ακμές, έτσι ώστε το T να είναι ένα μεγιστοτικό σχελετικό δέντρο με βάρη του W_G . Έτσι, το T ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες του clique tree. Θα χρησιμοποιούμε το clique tree

για να αναφερθούμε στο T και το αυστηρό clique tree για να αναφερθούμε στα T_i , τα οποία είναι υποδέντρα του T και αντιστοιχούν στα συνδεδεμένα τμήματα του G .

2.2.2 Clique separator

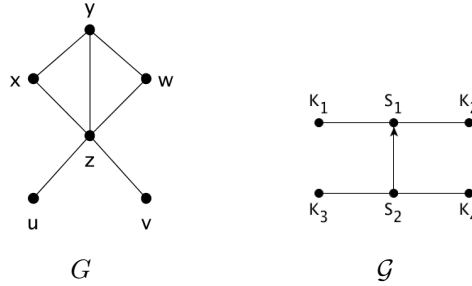
Όπως είδαμε πιο πάνω, οι κόμβοι ενός clique tree T ενός chordal γραφήματος είναι οι μεγιστοτικές κλίκες του G , ενώ οι ακμές αντιστοιχούν στους ελαχιστοτικούς διαχωριστές κόμβων του G .

Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το clique separator γράφημα $\mathcal{G}$ ενός chordal γραφήματος G , όπως περιγράφηκε από τον Ibarra [15]. Το γράφημα $\mathcal{G}$ είναι ένα γράφημα του οποίου οι κόμβοι είναι οι μεγιστοτικές κλίκες και ελαχιστοτικοί διαχωριστές-κόμβων. Τα (κατευθυνόμενα) βέλη και οι (μη κατευθυνόμενες) ακμές αναπαριστούν τη συσχέτιση του περιεχόμενου ανάμεσα στις μεγιστοτικές κλίκες και τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές του G .

Έστω ότι το G είναι ένα chordal γράφημα. Το clique separator γράφημα $\mathcal{G}$ του G έχει τους ακόλουθους κόμβους, (κατευθυνόμενα) βέλη και (μη κατευθυνόμενες) ακμές.

- Το $\mathcal{G}$ έχει ένα κλίκα κόμβο K για κάθε μεγιστοτική κλίκα K του G .
- Το $\mathcal{G}$ έχει ένα κόμβο διαχωριστή S για κάθε ελαχιστοτικό διαχωριστή S του G .
- Κάθε βέλος ξεκινάει από κόμβο διαχωριστή και καταλήγει σε κόμβο διαχωριστή. Το $\mathcal{G}$ έχει βέλος (S, S'') αν $S \subset S''$ και δεν υπάρχει διαχωριστής κόμβος S' τέτοιος ώστε $S \subset S' \subset S''$.
- Κάθε ακμή ενώνει ένα διαχωριστή κόμβο με ένα κλίκα κόμβο. Το $\mathcal{G}$ έχει ακμή $\{S, K\}$ αν $S \subset K$ και δεν υπάρχει διαχωριστής κόμβος S' τέτοιος ώστε $S \subset S' \subset K$.

Αντίστοιχα με το clique tree, αναφερόμαστε σε κορυφές του G και κόμβος του $\mathcal{G}$.

Σχήμα 2.5: Ένα chordal γράφημα G και το clique separator γράφημα του $\mathcal{G}$

Στο Σχήμα 2.5 βλέπουμε ένα chordal γράφημα G και δίπλα το clique separator γράφημα του $\mathcal{G}$. $K_1 = \{x, y, z\}$, $K_2 = \{y, z, w\}$, $K_3 = \{u, z\}$, $K_4 = \{v, z\}$, $S_1 = \{y, z\}$ και $S_2 = \{z\}$.

Ας υποθέσουμε ότι S και S' είναι δύο διακριτοί διαχωριστές κόμβοι του $\mathcal{G}$. Αν (S, S') είναι ένα βέλος στο $\mathcal{G}$, τότε ο S είναι ένας άμεσος πρόγονος του S' και ο S' είναι ένας άμεσος απόγονος του S . Συμβολίζεται με $S \rightarrow S'$. Αν υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από τον S στον S' στο $\mathcal{G}$, τότε ο S είναι πρόγονος του S' και ο S' είναι απόγονος του S . Συμβολίζεται με $S \rightsquigarrow S'$. $S \rightsquigarrow S'$ αν και μόνο αν $S \subset S'$. Αν στο $\mathcal{G}$ υπάρχει η ακμή $\{S, K\}$, όπου K είναι κλίκα κόμβος, τότε ο S είναι γείτονας της K ή αλλιώς γειτονικός και το αντίστροφο. Ο αριθμός των γειτόνων ενός κόμβου αποτελούν το βαθμό του. Αν ο S είναι γείτονας της K ή υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από τον S σε ένα γείτονα της K στο $\mathcal{G}$ τότε ο S είναι ένας πρόγονος της K και η K είναι ένας απόγονος του S . Συμβολίζεται με $S \rightsquigarrow K$. $S \rightsquigarrow K$ αν και μόνο αν $S \subset K$. Το σύνολο των άμεσων προγόνων του S , το σύνολο των άμεσων απογόνων του S και το σύνολο των γειτόνων του K είναι μεταξύ τους antichain.

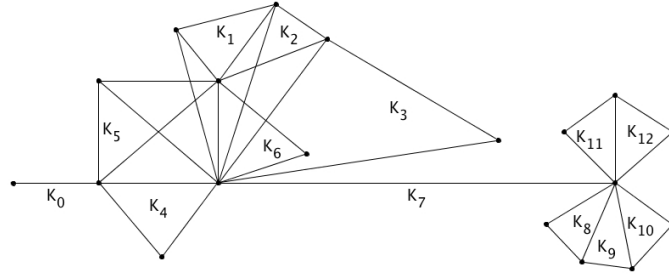
Ορισμός 2.10. Έστω ότι το F είναι μια οικογένεια συνόλων. Για $S \in F$, το S αποτελεί ένα ελαχιστοτικό στοιχείο του F αν δεν υπάρχει $S' \in F$ και να ισχύει $S' \subset S$ και S ένα μεγιστοτικό στοιχείο του F αν δεν υπάρχει $S' \in F$ και να ισχύει $S \subset S'$. Το F είναι chain, αν για οποιοδήποτε $S, S' \in F$, ισχύει ότι $S \subseteq S'$ ή $S' \subseteq S$. Το F είναι antichain αν για δύο οποιαδήποτε $S, S' \in F$ έχουμε ότι $S \not\subseteq S'$ ή $S' \not\subseteq S$.

Παρατήρηση 2.1. Για κάθε διαχωριστή κόμβος S , υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακμές ή δύο βέλη ή μια ακμή και ένα βέλος από τον S . Όπως ήδη γνωρίζουμε, $S = K \cap K'$ για κάποιες μεγιστοτικές κλίκες K και K' . Συνεπώς, $S \rightsquigarrow K$ και $S \rightsquigarrow K'$. Αν υποθέσουμε πως η παρατήρηση είναι λάθος, τότε υπάρχει ακριβώς

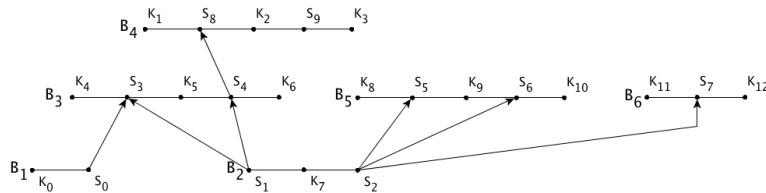
ένα βέλος (S, S') από το S όπου $S' \rightsquigarrow K$ και $S' \rightsquigarrow K'$. Όμως τότε $S \subset S' \subseteq K \cap K'$ που είναι άτοπο

Για ένα σύνολο κόμβων του $\mathcal{G}$, S , θέτουμε $V(S) = \{v \in V \mid v \in N \text{ και } N \in S\}$. Για ένα υπογράφημα $\mathcal{H}$ του $\mathcal{G}$. Θέτουμε $V(\mathcal{H}) = \{v \in V \mid v \in N \text{ και } N \text{ είναι ένας κόμβος του } \mathcal{H}\}$. Το $\mathcal{H}$ είναι *συνδεδεμένο* αν το μη κατευθυνόμενο γράφημα του $\mathcal{H}$ είναι κι αυτό συνδεδεμένο (το μη κατευθυνόμενο γράφημα προκύπτει από το $\mathcal{H}$ αν στη θέση των κατευθυνόμενων ακμών (βέλη τοποθετήσουμε ακμές). Το $\mathcal{G}$ είναι *συνδεδεμένο* αν και μόνο αν το G είναι συνδεδεμένο. Αν είναι υπογράφημα $\mathcal{H}$ του $\mathcal{G}$ είναι *συνδεδεμένο*, τότε το $G[V(\mathcal{H})]$ είναι συνδεδεμένο αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Ένα κουτί του $\mathcal{G}$ είναι ένα συνδεδεμένο “τμήμα” του μη κατευθυνόμενου γραφήματος, το οποίο προκύπτει αν διαγράψουμε τα βέλη στο $\mathcal{G}$. Από το Λήμμα 2.1 ένα κουτί του $\mathcal{G}$ περιέχει ακριβώς ένα κλίκας κόμβο K και κανένα διαχωριστή κόμβο αν και μόνο αν το K είναι ένα πλήρες συνδεδεμένο “τμήμα” του G . Θα δείξουμε ότι κάθε κουτί είναι ένα δέντρο: για οποιουσδήποτε δύο κόμβους N και N' του T , το σύνολο $N \cap N'$ εμπεριέχεται σε κάθε κόμβο του μονοπατιού $N - N'$ στο T .



Σχήμα 2.6: Ένα chordal γράφημα G .



Σχήμα 2.7: Το clique separator γράφημα $\mathcal{G}$ του chordal γραφήματος του Σχήματος 2.6.

Το Σχήμα 2.6 δείχνει ένα chordal γράφημα ενώ το Σχήμα 2.7 δείχνει το clique separator γράφημα του $\mathcal{G}$. Οι διαχωριστές κόμβοι S_0, S_1, S_2 έχουν μέγεθος 1, ο S_8 έχει μέγεθος 3 και κάθε άλλος S_i έχει μέγεθος 2. Τα κουτιά του $\mathcal{G}$ είναι τα B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 και B_6 .

Το γράφημα $\mathcal{G}^C$ δημιουργείται από το $\mathcal{G}$ αν μετατρέψουμε κάθε κουτί σ'ένα απλό κόμβο και αν αντικαταστήσουμε τις πολλαπλές κατευθυνόμενες ακμές από μια. Θα συμβολίζουμε με την ίδια μεταβλητή το κουτί του $\mathcal{G}$ με τον αντίστοιχο κόμβο του $\mathcal{G}^C$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{G}^C$ είναι ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα, το οποίο σημαίνει ότι το $\mathcal{G}^C$ έχει μια τοπολογική διάταξη σ . Δοθείσας της σ , θα υποθέσουμε ότι τα κουτιά του $\mathcal{G}$ είναι τοποθετημένα έτσι ώστε $\sigma = (B_1, B_2, \dots, B_{b(\mathcal{G})})$, όπου $b(\mathcal{G})$ είναι ο αριθμός των κουτιών του $\mathcal{G}$. Έστω ότι $\mathcal{G}(\sigma, i)$ είναι το υπογράφημα του $\mathcal{G}$ που επάγεται από τους κόμβους στα $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{b(\mathcal{G})}$. Θα γράφουμε το $\mathcal{G}(\sigma, i)$ σαν $\mathcal{G}(i)$ αν η τοπολογική διάταξη σ είναι καθαρή και θα αναφερόμαστε στο σ σαν μια τοπολογική διάταξη του $\mathcal{G}$. Στο Σχήμα 2.7 $\sigma = (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6)$ είναι μια τοπολογική διάταξη του $\mathcal{G}$. Για ένα διαχωριστή κόμβο S του $\mathcal{G}$, θέτουμε $\text{Preds}(S) = \{S' | S' = S \text{ ή } S' \rightsquigarrow S\}$. Λέμε ότι ο S χωρίζει τους κόμβους N και N' αν N και N' εμπεριέχονται στο ίδιο συνδεδεμένο τμήμα του $\mathcal{G}$ και σε διαφορετικά συνδεδεμένα τμήματα του $\mathcal{G} - \text{Preds}(S)$.¹

Θεώρημα 2.7 ([15]). Έστω G ένα chordal γράφημα με clique separator γράφημα $\mathcal{G}$ και έστω ότι το $\mathcal{G}$ έχει τοπολογική διάταξη σ . Έστω ότι S είναι ένας διαχωριστής κόμβος του $\mathcal{G}$.

1. Το $G - S$ έχει συνδεδεμένα τμήματα τα $G_1, G_2, \dots, G_k$ και το $G - \text{Preds}(S)$ έχει συνδεδεμένα τμήματα τα $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$, έτσι ώστε $k > 1$ και για κάθε $1 \leq i \leq k$, $V(G_i) = V(\mathcal{G}_i) - S$.
2. Κάθε κουτί είναι ένα δέντρο που έχει την ιδιότητα επικάλυψης των κλικών και το σύνολο των διαχωριστών κόμβων του είναι antichain. Το $\mathcal{G}^C$ είναι ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα.
3. Για κάθε $1 \leq i < j \leq \sigma(\mathcal{G})$, αν το S χωρίζει τους κόμβους N και N' στο $\mathcal{G}_j$, τότε το S χωρίζει τους N και N' στο $\mathcal{G}_i$.
4. Για κάθε $1 \leq i < j \leq \sigma(\mathcal{G})$ και για κάθε συνδεδεμένο τμήμα $\mathcal{H}$ του $\mathcal{G}_j$, το πολύ ένας διαχωριστής κόμβος του κουτιού B_i , είναι πρόγονος οποιουδήποτε κόμβου στο $\mathcal{H}$.

¹Στο Σχήμα 2.7 ο S_4 χωρίζει την K_5 και την K_7 και ο S_5 χωρίζει την K_8 και την K_9

5. Για κάθε $1 \leq j \leq \sigma(\mathcal{G})$ και για κάθε συνδεδεμένο τμήμα $\mathcal{H}$ του $\mathcal{G}_j$, $G[V(\mathcal{H})]$ είναι ένα συνδεδεμένο *chordal* γράφημα με *clique separator* γράφημα το $\mathcal{H}$.

Με *clique separator* γράφημα μπορούμε να αναπαραστήσουμε και *interval* γράφηματα όπου ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

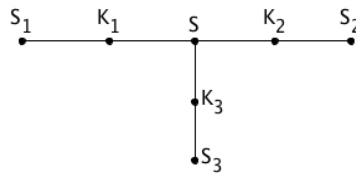
Λήμμα 2.4 ([15]). Έστω G ένα *interval* γράφημα με *clique separator* γράφημα $\mathcal{G}$.

1. Για κάθε κόμβο, το σύνολο των προγόνων του μπορεί να διαμεριστεί σε το πολύ δύο *chains*.
2. Κάθε κλίκα κόμβος έχει το πολύ δύο γείτονες. Κάθε κόμβος διαχωριστής έχει το πολύ δύο άμεσους προγόνους.
3. Υπάρχουν $O(n)$ κόμβοι, ακμές και βέλη στο $\mathcal{G}$.
4. Για κάθε ελαχιστοτική κλίκα K και *clique tree* T του G , $S_T(K)$ μπορεί να διαμεριστεί σε δύο το πολύ *chains*.

(Για ένα *clique tree* T του G , θέτουμε $S_T(K) = \{K \cap K' \mid \{K, K'\} \in E(T) \text{ και } K \cap K' \neq \emptyset\}$, το οποίο είναι ένα σύνολο από ελαχιστοτικούς διαχωριστές).

Λήμμα 2.5. Έστω G ένα *interval* γράφημα με *clique separator* γράφημα $\mathcal{G}$. Έστω B ένα κουτί του $\mathcal{G}$.

1. Κάθε μονοπάτι στο B ανάμεσα σε δύο διαχωριστές κόμβους είναι ένα μονοπάτι με περιορισμούς.
2. Κάθε διαχωριστής κόμβος του B έχει το πολύ δύο γείτονες που είναι εσωτερικοί κόμβοι του B .



Σχήμα 2.8: Ένας κόμβος διαχωριστής S με τρεις γείτονες που είναι εσωτερικοί κόμβοι.

Ένας κλίκα κόμβος που είναι φύλλο έχει βαθμό 1, ή ισοδύναμα μια κλίκα κόμβος που είναι φύλλο σε κάποιο κουτί. Το σώμα του κουτιού B , συμβολίζεται με $\text{σώμα}(B)$. Γίνεται εμφανές αν διαγράψουμε τα φύλλα κλίκες κόμβους από το B .

Θεώρημα 2.8 ([15]). Έστω G ένα interval γράφημα με clique separator γράφημα $\mathcal{G}$. Τότε για κάθε κουτί B , το $\text{σώμα}(B)$ είναι ένα μονοπάτι με περιορισμού του οποίου τα άκρα είναι κόμβοι διαχωριστές. Επιπλέον κάθε κόμβος διαχωριστής έχει το πολύ δύο άμεσους προγόνους και υπάρχουν $O(n)$ κόμβοι, ακμές και βέλη στο $\mathcal{G}$.

2.2.3 Clique arrangement

Για ένα chordal γράφημα $G = (V, E)$, καλούμε ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα $\mathcal{A}(G) = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ ως clique arrangement του G , όπως εισήχθη από τους Nevries και Rosenke [19]. Το σύνολο κόμβων $\mathcal{X}$ περιλαμβάνει ακριβώς όλες τις μη-κενές επικαλύψεις των μεγιστοτικών κλικών του G :

$$\mathcal{X} = \left\{ X \mid X = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \text{ με } \mathcal{C} \subseteq K_G \text{ και } X \neq \emptyset \right\},$$

και το σύνολο των βελών $\mathcal{E}$ περιγράφει τα κοινά στοιχεία :

$$\mathcal{E} = \{XZ \mid X, Z \in \mathcal{X} \text{ με } X \subset Z \text{ και } \nexists Y \in \mathcal{X} : X \subset Y \subset Z\}.$$

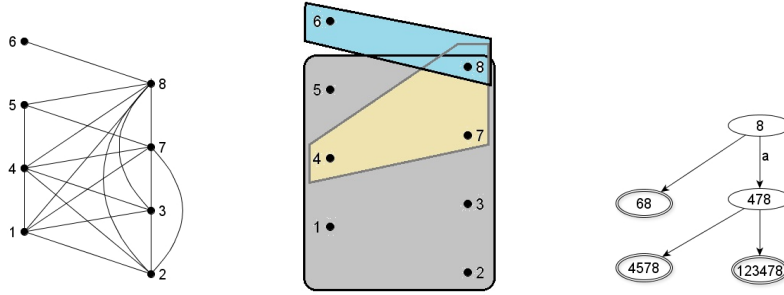
Μπορούμε να βρούμε το σύνολο K_G στο $\mathcal{X}$ εστιάζοντας στους προορισμούς (sinks) του $\mathcal{A}(G)$. Κάθε άλλο $X \in \mathcal{X}$ είναι η γενική επικάλυψη ενός συνόλου $C_1, \dots, C_k$ τουλάχιστον δύο μεγιστοτικών κλικών. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{X}$ περιλαμβάνει όλους τους διαχωριστές του G .

Για να καταφέρουμε να απεικονίσουμε πως δύο κόμβοι σε ένα clique arrangement σχετίζονται παραθέτουμε τις δύο ακόλουθες παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 2.2. Αν το $X \in \mathcal{X}$ είναι ένας κόμβος στο clique arrangement $\mathcal{A}(G) = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ ενός chordal γραφήματος G και αν $Y_1, \dots, Y_l \in \mathcal{X}$ είναι οι κατευθυνόμενοι απόγονοι του X , που σημαίνει, οι κόμβοι εκείνοι για τους οποίους $XY_1, \dots, XY_l \in \mathcal{E}$, τότε $X = Y_1 \cap \dots \cap Y_l$. Επιπλέον, αν $C_1, \dots, C_k$ είναι οι προορισμοί του $\mathcal{A}(G)$, στους οποίους καταλήγουμε αν ξεκινήσουμε από το X με κατευθυνόμενα μονοπάτια, τότε $X = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k$.

Παρατήρηση 2.3. Αν $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}$ είναι κόμβοι στο clique arrangement $\mathcal{A}(G) = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ ενός chordal γραφήματος G , τέτοιος ώστε η επικάλυψη $X = Y_1 \cap \dots \cap Y_k$ να μην είναι κενή, τότε $X \in \mathcal{X}$.

Παρατήρηση 2.4. Το *clique arrangement* είναι μοναδικό για ένα γράφημα σε αντίθεση με το *clique separator*.



Σχήμα 2.9: Ένα strongly chordal γράφημα G (αριστερά) με strong elimination ordering 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ένα σχηματικό διάγραμμα των μεγιστοτικών κλικών (κέντρο) και το clique arrangement του (δεξιά). Οι μεγιστοτικές κλικές είναι διπλά κυκλωμένες ενώ οι διαχωριστές απλά.

Όπως φαίνεται πιο πάνω, πολλοί κόμβοι σε ένα clique arrangement μπορεί να μην είναι ούτε μεγιστοτικές κλικές, ούτε διαχωριστές. Στην ουσία η ύπαρξη αυτών των κόμβων το διαφοροποιεί από το clique separator γράφημα του Ibarra [15].

Παίρνοντας όλες τις πιθανές επικάλυψεις μεγιστοτικών κλικών στο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα αξιοσημείωτο μειονέκτημα. Στην πραγματικότητα, η πληθυκότητα $|\mathcal{X}|$ μπορεί να γίνει εκθετικά μεγάλη για γενικά chordal γραφήματα, ακόμα και για την υποκλάση των split γραφημάτων.

Σε αντίθεση με τα chordal γραφήματα, το clique arrangement στα strongly chordal γραφήματα έχει μόνο πολυωνυμικό μέγεθος και αυτό αποδεικνύεται από το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.6 ([19]). *Αν το G είναι ένα strongly chordal γράφημα με clique arrangement $\mathcal{A}(G) = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ και $X \in \mathcal{X}$, τότε υπάρχουν $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ τέτοια ώστε $X = C_1 \cap C_2$.*

Από το Λήμμα 2.6, η πληθυκότητα του $\mathcal{X}$ είναι το πολύ $|\mathcal{C}(G)|^2$. Όπως τα chordal γραφήματα έχουν το πολύ $n - 1$ μεγιστοτικές κλικές [7], έπεται ότι $|\mathcal{X}| < n^2$. Απ'την άλλη μεριά, το $O(n^2)$ είναι η χειρότερη περίπτωση κατώτατου ορίου για το $|\mathcal{X}|$, το οποίο παραμένει ακόμα και για την πολύ περιοριστή υποκλάση των interval

γραφήματα. Για παράδειγμα, το clique arrangement για ένα interval γράφημα με κορυφές $x_1, \dots, x_{3k-1}$ και κλίκες $C_i = \{x_i, \dots, x_{i+k-1}\}$, $i \in \{1, \dots, 2k\}$ συμπεριλαμβάνει τον κόμβο $\{x_i, \dots, x_j\}$ για όλα τα i, j : $k \leq i \leq j < 2k$ και συνεπώς $\Omega(K^2) = \Omega(n^2)$ κόμβοι.

Για το ανώτατο όριο μεγέθους για ένα clique arrangement ίσως είναι χρήσιμο να αναπτύξουμε αλγόριθμους που να απευθύνονται σε strongly chordal γραφήματα. Στην πραγματικότητα θα ήταν πολύ ωραίο αν με αυτή τη νέα παρουσίαση μπορούσαμε να αναπτύξουμε αν τα strongly chordal γραφήματα μπορούν να αναγνωριστούν σε γραμμικό χρόνο. Για να μπορέσουμε να υποστηρίξουμε την επερχόμενη ανάλυση τόσο αυτού όσο και άλλων σύνθετων προβλημάτων θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό για το clique arrangement στα strongly chordal γραφήματα και θα αναλύσουμε την πολυπλοκότητα κατασκευής τους.

Τα clique arrangement δεν είναι εύχρηστα στην αναπαράσταση chordal γραφημάτων γενικά. Γι'αυτό το λόγο στρέφουμε την προσοχή μας στα strongly chordal γραφήματα, όπου η δομή έχει γραμμικό μέγεθος.

Ο χαρακτηρισμός των strongly chordal γραφημάτων βασίζεται στον ακόλουθο ορισμό των κύκλων σε ένα clique arrangement: για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$, ένας k -κύκλος του $\mathcal{A}(G)$ είναι ένα σύνολο από κόμβους $S_0, \dots, S_{k-1}$, $T_0, \dots, T_{k-1}$ έτσι ώστε για όλα τα $i \in \{0, \dots, k-1\}$ να υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από το S_i στο T_i και ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από το S_i στο T_{i-1} . Οι κόμβοι $S_0, \dots, S_{k-1}$ ονομάζονται *αφετηρίες* του κύκλου και οι κόμβοι $T_0, \dots, T_{k-1}$ καλούνται *τερματικά* του κύκλου. Εξ ορισμού $S_i \subseteq T_i$ και $S_i \subseteq T_{i-1}$ για όλα τα $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Αλλά, όπως οι κύκλοι στα chordal γραφήματα γίνονται απαγορευμένοι μόνο αν επάγονται, ένας k -κύκλος δεν είναι απαγορευμένος από μόνος του στο clique arrangement ενός strongly chordal γραφήματος. Καλούμε έναν k -κύκλο *κακός* αν για $k \geq 3$ και για όλα τα $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$ υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από το S_i στο T_j μόνο αν το $j \in \{i-1, i\}$. Στο ακόλουθο θεώρημα θα δείξουμε ότι τα clique arrangements κάποιων strongly chordal γραφημάτων χαρακτηρίζονται από απαγορευμένους κακούς k -κύκλους με $k \geq 3$:

Θεώρημα 2.9 ([19]). Έστω $G = (V, E)$ ένα chordal γράφημα και $\mathcal{A}(G) = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ το clique arrangement του G . Τότε, το G είναι strongly chordal, αν και μόνο αν το $\mathcal{A}(G)$ δεν περιέχει κακούς k -κύκλους για όλα τα $k \geq 3$.

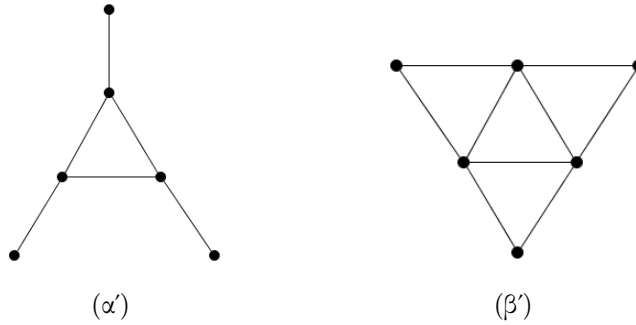
Είναι γνωστό πως η κατασκευή του clique arrangement ενός strongly chordal γραφήματος γίνεται σε χρόνο $O(m \log n)$. Στην πραγματικότητα η κατασκευή δουλεύει σε γραμμικό χρόνο αν δοθεί μια ισχυρή διάταξη των κόμβων στην

Κεφάλαιο 2.3. Αναπαράσταση strongly chordal γραφημάτων με clique separator

κατασκευή του αλγορίθμου [20]. Με μια ισχυρή διάταξη των $x_1, \dots, x_n$ του γραφήματος εισόδου G , ο αλγόριθμος κατασκευάζει το $\mathcal{A}(G)$ βήμα βήμα. Όσο το clique arrangement ενός γραφήματος περιέχει ένα και μοναδικό κόμβο είναι πολύ απλό, η αρχικοποίηση εύκολα κατασκευάζει το $\mathcal{A}(G[\{x_n\}])$. Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος τροποποιεί το τρέχων clique arrangement $\mathcal{A}(G[\{x_{i+1}, \dots, x_n\}])$, για να παράγει το νέο clique arrangement $\mathcal{A}(G[\{x_i, \dots, x_n\}])$.

2.3 Αναπαράσταση strongly chordal γραφημάτων με clique separator

Τα strongly chordal γραφήματα δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με ακρίβεια με clique separator. Παρακάτω φαίνεται σχηματικά ο λόγος. Έστω δύο γραφήματα



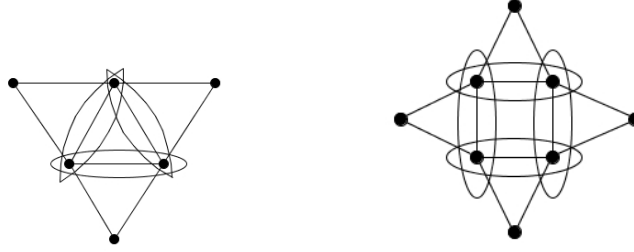
Σχήμα 2.10

Το γράφημα (α') του Σχήματος 2.10 είναι strongly chordal ενώ το γράφημα (β') είναι 3-sun και άρα δεν είναι strongly chordal. Παρ'όλο αυτά και τα δύο γραφήματα αναπαρίστανται με τον ίδιο τρόπο στο clique separator γράφημα. Συνεπώς, αυτή η αναπαράσταση δεν είναι μοναδική για κάθε strongly chordal γράφημα.

Ωστόσο, εμείς θα δείξουμε πως μπορεί να επεκταθεί η αναπαράσταση clique separator για τα strongly chordal γραφήματα.

Ορισμός 2.11. Έστω $\mathcal{F}$ μία οικογένεια συνόλων. Το $\mathcal{F}$ καλείται *antichain* αν για οποιαδήποτε διακριτά $S, S' \in \mathcal{F}$, έχουμε $S \not\subseteq S'$ και $S' \not\subseteq S$.

Θεώρημα 2.10. Ένα γράφημα είναι strongly chordal αν και μόνο αν στο clique separator γράφημα οι διαχωριστές κόμβοι στο intersection τους γράφημα δεν κάνουν κύκλο και τα intersection τους φτιάχνουν antichain.



Σχήμα 2.11: Παραδείγματα γραφημάτων που οι διαχωριστές κάνουν κύκλο.

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Αν ένα γράφημα είναι strongly chordal δεν μπορεί να περιέχει $3-sun$, $4-sun$, ... στα οποία το intersection γράφημα των διαχωριστών κάνει κύκλο και άρα $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Έστω ένα $k-sun$ με κλίκες $C_1, \dots, C_k$ και ανεξάρτητο σύνολο $S_1, \dots, S_k$. Τότε, οι ελαχιστοτικοί διαχωριστές είναι οι $C_i C_{i+1}$. Δηλαδή, $S_i = \{C_i, C_{i+1}\}$. Επομένως, η τομή $S_i \cap S_{i+1} = C_{i+1}$ και κανένα δεν είναι υποσύνολο κάποιας άλλης τομής. Επομένως, σχηματίζουν antichain κύκλο.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η επικάλυψη των διαχωριστών κάνει κύκλο $C = \{S_1 \cap S_2, S_2 \cap S_3, \dots, S_k \cap S_1\}$. Επειδή, $S_i \cap S_{i+1} \neq S_j \cap S_{j+1}$ θα υπάρχει κάποια κορυφή $v_i \in S_i \cap S_{i+1}$ και μία άλλη $v_j \in S_j \cap S_{j+1}$. Δηλαδή, η κορυφή v_i ανήκει και στο S_i και στο S_{i+1} . Άρα, διαχωρίζει κάποιες άλλες κορυφές $x_i \in K_i$ και $x_{i+1} \in K_{i+1}$. Επομένως, οι κορυφές x_i, x_{i+1} ενώνονται με τις κορυφές v_i και v_{i+1} και σχηματίζουν ένα $k-sun$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ

3.1 Κλασσικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης

Ορισμός 3.1. Αλγόριθμοι αναγνώρισης ονομάζονται οι αλγόριθμοι εκείνοι που δέχονται ως είσοδο ένα γράφημα και αναγνωρίζουν αν το συγκεκριμένο γράφημα ανήκει σε μία κλάση γραφημάτων.

Αναφερόμαστε σε κλασσικούς αλγόριθμους αναγνώρισης για να διαφοροποιηθούμε από τους δυναμικούς αλγόριθμους αναγνώρισης που θα δούμε στη συνέχεια.

Για τις κλάσεις γραφημάτων που μας αφορούν είναι ήδη γνωστοί κάποιοι τέτοιοι αλγόριθμοι.

Τα chordal γραφήματα μπορούν να αναγνωριστούν σε $O(n + m)$ χρόνο, όπως περιγράφουν οι Rose, Tarjan και Lueker [21] και σύμφωνα με τους Tarjan και Yannakakis [24]. Τα stongly chordal γραφήματα μπορούν να αναγνωριστούν σε $O(\min\{n^2, m \log n\})$ χρόνο. Όπως είναι ήδη γνωστό οι Paige και Tarjan κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα τέτοιο αλγόριθμο αναγνώρισης σε $O(n^2)$ χρόνο [20], ενώ ο Spinrad σε $O(m \log n)$ χρόνο [23].

Τόσο τα interval γραφήματα όσο και τα split γραφήματα αναγνωρίζονται σε $O(n + m)$ χρόνο. Αλγόριθμους για τα interval γραφήματα έχουμε από τους Fulkerson και Gross [7] και από τους Booth και Lueker [2], ενώ για τα split γραφήματα γνωστός είναι ο αλγόριθμος από τους Földes και Hammer [6].

3.2 Δυναμικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης

Ένας δυναμικός αλγόριθμος αναγνώρισης γραφημάτων για μία κλάση Π γραφημάτων είναι ένας αλγόριθμος που κάνει μία σειρά από τροποποιήσεις, βασιζόμενος

Κλάσεις Γραφημάτων	Χρόνος
chordal	$O(n + m)$
strongly chordal	$O(\min\{n^2, m \log n\})$
interval	$O(n + m)$
split	$O(n + m)$

στα προηγούμενα βήματα (π.χ. εισαγωγές ή διαγραφές κορυφών ή ακμών) σε ένα γράφημα στο Π . Αν το αποτέλεσμα της τροποποίησης είναι ένα γράφημα στο Π , ο αλγόριθμος προχωράει (κάνοντας μία εσωτερική ενημέρωση), αλλιώς επιστρέφει το false και δεν κάνει τίποτα. Τέτοιοι αλγόριθμοι κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τις τροποποιήσεις που υποστηρίζουν: ένας incremental (decremental) αλγόριθμος υποστηρίζει μόνο εισαγωγές (διαγραφές) κορυφών, ένας additions-only (deletions-only) αλγόριθμος υποστηρίζει μόνο προσθέσεις (διαγραφές) ακμών, ένας edges-only δυναμικός αλγόριθμος υποστηρίζει και προσθέσεις ακμών και διαγραφές ακμών, ένας fully dynamic αλγόριθμος υποστηρίζει τόσο όλες τις τροποποιήσεις στις ακμές όσο και στις κορυφές.

Κλάσεις Γραφημάτων	Πρόσθεση ακμής	Διαγραφή ακμής	Πρόσθεση κορυφής	Διαγραφή κορυφής
chordal	$O(n)$ [14]	$O(n)$ [14]	$O(n)$ [1]	$O(n)$ [1]
interval	$O(n)$ [4]	$O(n)$ [4]	$O(n)$ [4]	-
split	$O(1)$ [14]	$O(1)$ [14]	$O(d)$ [12]	$O(d)$ [12]

Πίνακας 3.1: Οι γνωστοί αλγόριθμοι αναζήτησης για κάποιες κλάσεις γραφημάτων. Συμβολίζουμε με d τον βαθμό ενός κόμβου v .

Έστω Π μία κλάση γραφημάτων. Ένας δυναμικός αλγόριθμος για Π -αναγνώριση διατηρεί μία δομή δεδομένων του τρέχοντος γραφήματος $G \in \Pi$ και υποστηρίζει τις ακόλουθες πράξεις.

- Πρόσθεση ακμής: δίνονται δύο κορυφές $u, v \in V(G)$, οι οποίες είναι μη γειτονικές στο G , ανανεώνουμε τη δομή δεδομένων αν $G \cup \{uv\} \in \Pi$, αλλιώς έχουμε σαν έξοδο false.
- Διαγραφή ακμής: δίνεται μία ακμή $uv \in E(G)$, ανανεώνουμε τη δομή δεδομένων αν $G - \{uv\} \in \Pi$, αλλιώς έχουμε σαν έξοδο false.
- Εισαγωγή κορυφής: δίνεται ένας νέος κόμβος $v \notin V(G)$ γειτονικός με κάποιες κορυφές στο G (πιθανά με καμία ή με όλες), ανανεώνουμε τη δομή

δεδομένων αν $G \cup \{v\} \in \Pi$, αλλιώς έχουμε σαν έξοδο false.

- Διαγραφή κορυφής: δίνεται ένας κόμβος $v \in V(G)$, ανανεώνουμε τη δομή δεδομένων αν $G - \{v\} \in \Pi$, αλλιώς έχουμε σαν έξοδο false.

Μετά την εκτέλεση οποιασδήποτε τέτοιας πράξης, ο αλγόριθμος είναι έτοιμος να εκτελέσει την επόμενη πράξη. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η πρόσθεση (αφαίρεση) κορυφής δεν συνεπάγεται την πρόσθεση (διαγραφή) των προσπίπτουσων ακμών, για αυτό οι πράξεις με κορυφές πρέπει να γίνονται χωριστά από τις πράξεις με ακμές από έναν δυναμικό αλγόριθμο. Όμως, σημειώνουμε ότι οι πράξεις με κόμβους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υποστηρίξουν πράξεις με ακμές στον ίδιο χρόνο που χρειάζεται μια αφαίρεση κορυφής και μια πρόσθεση κορυφής, όπως έχει γίνει ήδη για την κλάση των interval γραφημάτων [4].

Η σημαντική διαφορά των δυναμικών αλγορίθμων είναι ότι έχουμε γνώση της ιδιότητας του G (π.χ. ανήκει σε μία κλάση γραφημάτων) κάτι που δεν ισχύει στους κλασσικούς αλγόριθμους αναγνώρισης.

Στόχος είναι η επίτευξη ενός αλγόριθμου που θα είναι ταχύτερος από τον κλασσικό καθώς θα λαμβάνει υπόψη την επιπλέον πληροφορία που έχει για το G . Η δυσκολία βέβαια είναι ότι εκτός από τον σχεδιασμό ενός ταχύτερου αλγόριθμου αναγνώρισης, θα πρέπει να ενημερώνεται κατάλληλα και η δομή αναπαράστασης σε χρόνο επίσης ταχύτερο από τον κλασσικό αλγόριθμο αναγνώρισης.

Κεφάλαιο 3.

3.2. Δυναμικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΓΡΑΦΗ ΑΚΜΗΣ

4.1 Διαγραφή ακμής σε chordal γραφήματα

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την διαγραφή ακμής σε strongly chordal γραφήματα. Ωστόσο, πρώτα θα κάνουμε μία σύντομη επισκόπηση στον αντίστοιχο δυναμικό αλγόριθμο για τα chordal γραφήματα.

4.1.1 Διαγραφή ακμής σε clique tree

Οι Ho και Lee [1989] και ο Lundquist [1990] ανεξάρτητα ανακάλυψαν την ακόλουθη ιδιότητα για τα clique trees.

Συμβολίζουμε με G το τρέχον chordal γράφημα και με T το τρέχον clique tree που αναπαριστά το G .

Για να διαγράψουμε μια ακμή πρέπει πρώτα να ελέγξουμε αν το $G - \{u, v\}$ είναι chordal για $\{u, v\} \in E$.

Λήμμα 4.1 (Rose κ.α. 1976). Έστω G ένα chordal γράφημα με ακμή $\{u, v\}$. Τότε το $G - \{u, v\}$ είναι είτε chordal ή έχει ένα άχορδο κύκλο μήκους 4.

Λήμμα 4.2 (Grone κ.α. 1984). Ένα γράφημα H δεν περιέχει άχορδο κύκλο μήκους 4 αν και μόνο αν για όλες τις διακριτές κορυφές s, t με $\{s, t\} \notin E(H)$, το $H + \{s, t\}$ έχει ακριβώς μια μεγιστοτική κλίκα που περιέχει την $\{s, t\}$.

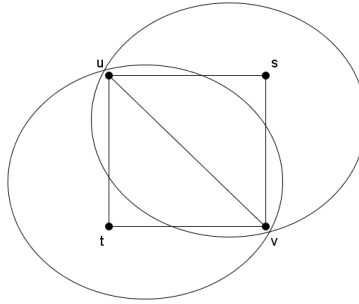
Από το Λήμμα 4.1 και το Λήμμα 4.2, το $G - \{u, v\}$ είναι chordal αν και μόνο αν για όλες τις διακριτές κορυφές s, t με $\{s, t\} \notin E(G - \{u, v\})$, $G - \{u, v\} + \{s, t\}$ έχει ακριβώς μια μεγιστοτική κλίκα που περιέχει την $\{s, t\}$. Γι'αυτό μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το $G - \{u, v\}$ chordal είναι το G να έχει ακριβώς μια μεγιστοτική κλίκα που να περιέχει την $\{u, v\}$. Στην πραγματικότητα αυτή η συνθήκη είναι και ικανή. Παρ'όλα αυτά η αναγκαιότητα δεν έπεται άμεσα από το

Λήμμα 4.2. Η απόδειξή του είναι παρόμοια με την απόδειξη του Λήμματος 3 στο Grone κ.α. [1984].

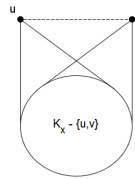
Θεώρημα 4.1. Έστω G ένα chordal γράφημα με ακμή $\{u, v\}$. Τότε το $G - \{u, v\}$ είναι chordal αν και μόνο αν το G έχει ακριβώς μια μεγιστοτική κλίκα που να περιέχει το $\{u, v\}$.

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Από το Λήμμα 4.1 και το Λήμμα 4.2.

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το $G - \{u, v\}$ δεν είναι chordal. Από το Λήμμα 4.1, το $G - \{u, v\}$ έχει ένα άχορδο κύκλο μήκους 4, έστω (u, s, v, t) . Απ'τη στιγμή που το $\{u, v\}$ είναι μια ακμή του G και το $\{s, t\}$ δεν είναι μια ακμή του G , έπεται ότι $\{u, v, s\}$ και $\{u, v, t\}$ είναι δύο κλίκες του G που δεν μπορούν να περιέχονται στην ίδια μεγιστοτική κλίκα του G . Γι'αυτό το $\{u, v\}$ εμπεριέχεται σε τουλάχιστον δύο διακριτές μεγιστοτικές κλίκες του G . $\square$

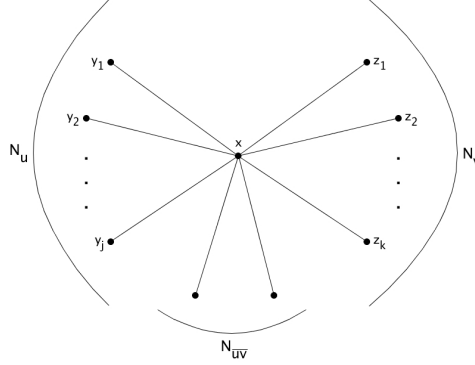


Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2: Διαγράφοντας την ακμή $\{u, v\}$ από την K_x .

Η παραπάνω ιδιότητα έχει ήδη αποδειχθεί στο [14] και αποτελεί την βάση για τον σχεδιασμό ενός δυναμικού αλγόριθμου που αναγνωρίζει αν το $G - \{u, v\}$ είναι chordal γράφημα. Βασίζεται στην εξής απλή διαδικασία:

Σχήμα 4.3: Πριν τη διαγραφή της ακμής $\{u, v\}$.**Διαγραφή (u, v)**

Για κάθε κόμβο $x \in T$, έλεγξε αν $\{u, v\} \in K_x$. Αν υπάρχει ακριβώς ένας τέτοιος κόμβος, επέστρεψε “NAI”, αλλιώς επέστρεψε “OXI”.

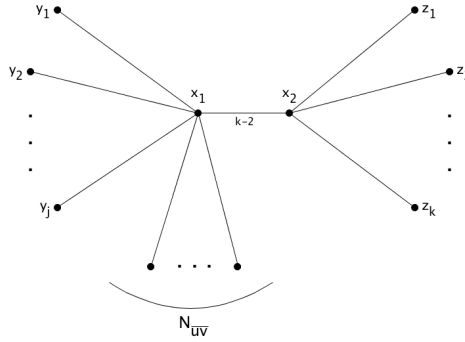
Τέλος Διαγραφή**4.1.2 Διαγραφή και Ενημέρωση του clique tree**

Πρώτα, τρέχουμε την Διαγραφή–Ενημέρωση (u, v) και στη συνέχεια πρέπει να ενημερώσουμε την δομή, δηλαδή το clique tree.

Διαγραφή–Ενημέρωση (u, v)

1. Βρίσκουμε το μοναδικό κόμβο x του T τέτοιο ώστε $\{u, v\} \in K_x$. Αν υπάρχουν περισσότεροι από ένας τέτοιοι κόμβοι, απορρίπτεται η διαγραφή. Διαφορετικά για κάθε $y \in N(x)$, ελέγχουμε αν $u \in K_y$ ή $v \in K_y$ και αν $w(x, y) = k - 1$.
2. (Τροποποιούμε το T σαν να ήταν μεγιστοτικές κλίκες οι K_x^u και K_x^v και τροποποιούμε το T ξανά αν δεν είναι. Είναι απλό να ξαναγράψουμε τη διαδικασία ώστε το T να τροποποιηθεί μια φορά.) Αντικαθιστούμε τον κόμβο x με τους νέους κόμβους x_1 και x_2 αντίστοιχα αναπαριστώντας την K_x^u και K_x^v και προσθέτουμε την ακμή $\{x_1, x_2\}$ με $w(x_1, x_2) = k - 2$. Στη συνέχεια, το βάρος κάθε νέας ακμής, είναι το αντικατεστημένο βάρος της παλιάς ακμής. Αν $y \in N(u)$, αντικαθιστούμε την $\{x, y\}$ με την $\{x_1, y\}$. Αν $z \in N_v$ αντικαθιστούμε την $\{x, z\}$ με $\{x_2, z\}$. Αν $w \in N_{uv}$, αντικαθιστούμε

την $\{x, w\}$ με την $\{x_1, w\}$ ή $\{x_2, w\}$, επιλέγοντας αυθαίρετα. Παρατηρούμε ότι το T έχει την ιδιότητα του επαγόμενου υποδέντρου. (Σχήμα 4.4)



Σχήμα 4.4: Διαγράφοντας την $\{u, v\}$.

3. Αν οι K_x^u και K_x^v είναι μεγιστοτικές στο $G - \{u, v\}$, σταμάτα. Αν η K_x^u δεν είναι μεγιστοτική επειδή $K_x^u \subset K_{y_i}$ για κάποιο $y_i \in N_u$, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα τέτοιο y_i , παίρνουμε το $\{x_1, y_i\}$ και αντικαθιστούμε το x_1 με y_i . Αυτό διατηρεί την ιδιότητα του επαγόμενου υποδέντρου, ακόμα και αν $K_x^u \subset K_{y_i}$, για περισσότερα από ένα $y'_i \in N_u$. Με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε αν η K_x^v δεν είναι μεγιστοτική επειδή $K_x^v \subset K_{z_i}$ για κάποιο $z_i \in N_v$. Επιλέγουμε τυχαία ένα τέτοιο z_i , παίρνουμε την $\{x_2, z_i\}$ και αντικαθιστούμε το x_2 με z_i . Έτσι, το x έχει αντικατασταθεί με 0, 1 ή 2 νέους κόμβους.

Σε κάθε περίπτωση η ακμή που προστίθεται μεταξύ x_1 και x_2 , της οποίας τα άκρα μπορεί να έχουν αλλάξει περιέχουν το u και το v . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση.

Τέλος Διαγραφή-Ενημέρωση

Η Διαγραφή-Ενημέρωση (u, v) ενημερώνει το T έτσι ώστε να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των κόμβων του T και των μεγιστοτικών κλίκων του $G - \{u, v\}$. Επιπρόσθετα, το T έχει την ιδιότητα του επαγόμενου υποδέντρου και το βάρος οποιασδήποτε ακμής $\{y, z\} \in T$ είναι $|K_y \cap K_z|$. Ως εκ τούτου, το T είναι ένα clique tree για το $G - \{u, v\}$.

Μπορούμε εύκολα να αποφασίσουμε αν η $\{u, v\}$ είναι μια γέφυρα του G , που σημαίνει, αν διαγράψουμε τη $\{u, v\}$ διαχωρίζει μια συνεκτική συνιστώσα του G , όπως φαίνεται παρακάτω. Αν η $\{u, v\}$ είναι μια γέφυρα, πρέπει να βρίσκεται σε μια

μεγιστοτική κλίκα. Αν η $\{u, v\}$ δεν είναι μια γέφυρα, τότε το G έχει ένα κύκλο που περιέχει τη $\{u, v\}$ και ο συντομότερος τέτοιος κύκλος έχει μήκος 3 ή με άλλα λόγια το G δεν είναι chordal, το οποίο συνεπάγεται ότι η $\{u, v\}$ δεν ανήκει σε μια μεγιστοτική κλίκα. Συνεπώς, η $\{u, v\}$ είναι μια γέφυρα του G αν και μόνο αν η $\{u, v\}$ βρίσκεται σε μια μεγιστοτική κλίκα του G , που σημαίνει ότι $|K_x| = 2$.

Θεώρημα 4.2 ([14]). Έστω G ένα chordal γράφημα και έστω $u, v \in E(G)$. Υπάρχει δυναμικός αλγόριθμος που αναγνωρίζει αν το $G - uv$ είναι chordal και τρέχει σε $O(n)$ χρόνο.

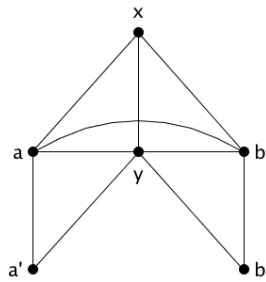
4.2 Διαγραφή ακμής σε strongly chordal γραφήματα

4.2.1 Διαγραφή ακμής μέσω clique separator

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό και χαρακτηρισμό.

Ορισμός 4.1. Ένας κόμβος y λέγεται *guard* αν ανήκει στην κλίκα ενός *simplicial* κόμβου και έχει τουλάχιστον δύο γείτονες που να έχουν *private* γείτονες μεταξύ τους.

Λήμμα 4.3 ([13]). Έστω G ένα strongly chordal γράφημα. Έστω ότι ο x είναι ένας *simplicial* κόμβος του G και έστω xy μια ακμή του G . Το $G - \{x, y\}$ είναι strongly chordal αν και μόνο αν ο y δεν είναι κόμβος *guard* για τον x .



Σχήμα 4.5: Ο guard κόμβος y . Έστω a' και b' οι *private* γείτονες που είναι αντίστοιχα γείτονες των a και b που είναι γείτονες του y .

Έστω $K_{x,y}$ μια κλίκα που να περιέχει τους x και y , έστω $S_1^{(y)}$ ένα διαχωριστή

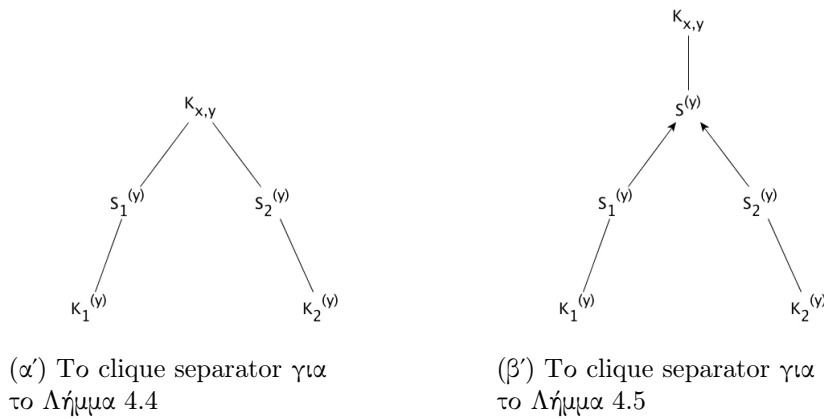
που να περιέχει τον κόμβο y και $S_2^{(y)}$, αντίστοιχα ένα διαχωριστή που να περιέχει τον κόμβο y .

Λήμμα 4.4. *Αν στο clique separator γράφημα η κλίκα $K_{x,y}$ ενώνεται με ακμή με τους $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)}$, τότε ο y είναι guard.*

Απόδειξη. Οι $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)}$ ανήκουν στο ίδιο κουτί, άρα έχουν την ιδιότητα anti-chain (δηλαδή ο ένας δεν είναι υποσύνολο του άλλου). Άρα, $\exists a \in S_1$ και $\exists b \in S_2$, όπου $a, b \in K_{x,y}$. Όμως, τα $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)}$ είναι διαχωριστές, που σημαίνει ότι διαχωρίζουν δύο κλίκες το καθένα, άρα $\exists a'$ και b' αντίστοιχα που υπάρχουν στις κλίκες που διαχωρίζουν ο $S_1^{(y)}$ και ο $S_2^{(y)}$ και που δεν υπάρχουν ούτε στους διαχωριστές ούτε στην $K_{x,y}$. $\square$

Λήμμα 4.5. *Έστω $S^{(y)}$ διαχωριστής που περιέχει τον y . Αν στο clique separator υπάρχει μια κλίκα $K_{x,y}$ που να ενώνεται με ακμή με το διαχωριστή $S^{(y)}$, ενώ στον $S^{(y)}$ καταλήγουν μέσω κάποιου κατευθυνόμενου μονοπατιού, ο $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)}$, τότε ο y είναι guard.*

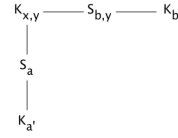
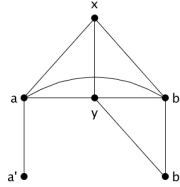
Απόδειξη. Λόγω του ότι τα βέλη καταλήγουν στον $S^{(y)}$ εξ'ορισμού $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)} \subseteq S^{(y)}$ και $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)}$ antichain. Άρα, $\exists a \in S_1$ και $b \in S_2$: $a, b \in K_{x,y}$. Όμως οι $S^{(y)}$, $S_1^{(y)}$ και $S_2^{(y)}$ διαχωριστές άρα υπάρχουν $a', b' \in K_1^{(y)}$ και $K_2^{(y)}$: $a' \in S_1^{(y)}, S_2^{(y)}, S^{(y)}, K^{(x,y)}$ και αντίστοιχα το b' . $\square$



Σχήμα 4.6

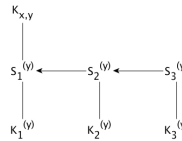
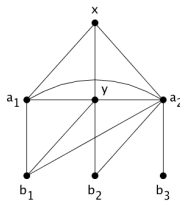
Θεώρημα 4.3. Έστω K_{xy} μία μοναδική κλίκα που ανήκουν οι x, y κορυφές. Ο y είναι *guard* αν και μόνο αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι διαχωριστές $S_1^{(y)}$, $S_2^{(y)}$ τέτοιοι ώστε $y \in S_1^{(y)}$, $y \in S_2^{(y)}$ και $S_1^{(y)} \rightsquigarrow K_{xy}$ και $S_2^{(y)} \rightsquigarrow K_{xy}$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν ο y δεν είναι *guard* τότε από τον ορισμό προκύπτει ότι είτε θα υπάρχουν *private* γείτονες (a', b'), αλλά ο y θα είναι γειτονικός το πολύ σε έναν *private*. Αυτό σημαίνει ότι ο y δεν θα υπάρχει στον ένα διαχωριστή, εκείνο δηλαδή που διαχωρίζει τον *private* κόμβο που δεν είναι γειτονικός ο y με το υπόλοιπο γράφημα



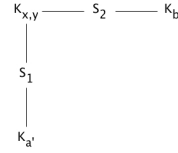
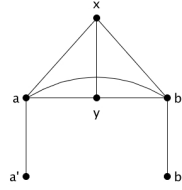
Σ' αυτή την περίπτωση στον ένα διαχωριστή δεν υπάρχει ο y

είτε δε θα υπάρχουν *private* γείτονες (a', b') δηλαδή ο y θα είναι γειτονικός με όλους τους κόμβους, άρα θα υπάρχει σε όλους τους διαχωριστές. Αυτό σημαίνει ότι οι διαχωριστές θα επικαλύπτονται μεταξύ τους και άρα δεν θα έχουν την *antichain* ιδιότητα



όπου $S_1^{(y)}$, $S_2^{(y)}$, $S_3^{(y)}$ έχουν την *chain* ιδιότητα

είτε θα υπάρχουν *private* γείτονες (a', b'), αλλά ο y δε θα είναι γειτονικός ούτε με τον ένα, ούτε με τον άλλο και συνεπώς δεν θα υπάρχει σε κανένα διαχωριστή.



ο y δεν υπάρχει σε κανένα από τους διαχωριστές.

($\Leftarrow$) Προκύπτει από το Λήμμα 4.4 και το Λήμμα 4.5. □

Ένα strongly chordal γράφημα είναι και chordal. Συνεπώς, αρχικά τρέχουμε τον αλγόριθμο Διαγραφής–Ενημέρωσης ακμής (u, v) που περιγράψαμε στην ενότητα 4.1. Αν η διαγραφή επιτρέπεται προχωράμε στο δικό μας αλγόριθμο.

Συνοπτικά ως εδώ, είδαμε ότι το γράφημα είναι chordal και ότι παραμένει chordal και μετά τη διαγραφή της ακμής (u, v) . Επίσης, γνωρίζουμε που βρίσκεται η $K_{x,y}$, που είναι η μοναδική κλίκα που περιέχει και τον x και τον y , όπως περιγράφηκε στο θεώρημα 4.1.

Συνεπώς, γνωρίζουμε ακριβώς που βρίσκεται η $K_{x,y}$. Επόμενος στόχος είναι να διερευνήσουμε αν ο x ή ο y είναι κόμβοι guard, λόγω του Θεωρήματος 4.3. Θα περιγράψουμε την διαδικασία μόνο για την κορυφή x . Ανάλογα, εκτελείται και για την κορυφή y .

Βήμα 1: Πρώτα, εξετάζουμε το κουτί (box) στο οποίο ανήκει η $K_{x,y}$. Ελέγχω τη γειτονιά της κλίκας $K_{x,y}$ ($N(K_{x,y})$) και πρέπει να υπάρχουν το πολύ ένας διαχωριστής που να περιέχει τον x (S_x) και το πολύ ένας διαχωριστής που να περιέχει τον y (S_y). Αν υπάρχουν $S_x^{(1)}, S_x^{(2)} \in N(K_{x,y})$, τότε απαντάμε “ΟΧΙ”, δηλαδή η διαγραφή ακμής στα strongly chordal δεν μπορεί να προχωρήσει αφού ο x ή ο y αντίστοιχα είναι guard και λόγω του Λήμματος 4.3 το $G - xy$ δεν είναι strongly chordal.

Βήμα 2: Έστω S_x ο μοναδικός διαχωριστής του box στο οποίο ανήκει η $K_{x,y}$. Για κάθε $S \rightarrow S_x$ εξετάζουμε αν $x \in S$.

- Αν υπάρχουν δύο S, S' τέτοια ώστε $x \in S, x \in S'$ τότε απαντάμε “ΟΧΙ”.
- Αν υπάρχει ένας διαχωριστής S'_x τέτοιος ώστε $x \in S'_x$, τότε θέτουμε $S_x = S'_x$ και εκτελούμε ξανά το βήμα 2.

- Αν δεν υπάρχει κανένας διαχωριστής S που να ανήκει η κορυφή x , τότε απαντάμε “NAI”.

Η ορθότητα του αλγόριθμου βασίζεται στο Θεώρημα 4.3 και στο γεγονός ότι το clique separator (G^C) είναι κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα από το Θεώρημα 2.7, το βήμα 2 θα εκτελεστεί σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Ως προς τον χρόνο του αλγόριθμου θα δείξουμε ότι εκτελείται σε $O(n)$ χρόνο. Κάθε γειτονικός κόμβος του K_{xy} έχει μία κορυφή γειτονική της x . Όλοι οι γείτονες της K_{xy} είναι το πολύ n σε πλήθος. Επομένως, το βήμα 1 θέλει $O(n)$ χρόνο. Για το βήμα 2 θα δείξουμε ότι εκτελείται σε χρόνο $O(deg(x))$ χρόνο, όπου $deg(x)$ ο βαθμός της κορυφής x . Κάθε διαχωριστής S είναι υποσύνολο κάποιας γειτονικής κλίμας K . Επίσης, αν $x \in S$ και $S' \rightarrow S$, τότε η κορυφή x είναι γειτονική με κάθε κορυφή του S' καθώς $S' \subset S$ και κάθε διαχωριστής είναι κλίμα σε ένα strongly chordal γράφημα.

Τώρα, θα δείξουμε ότι κάθε κορυφή γειτονική της x την εξετάζουμε το πολύ μία φορά σε κάθε επανάληψη του βήματος 2. Έστω $x \in S_x$ και $S \rightarrow S_x$ τέτοιο ώστε $x \notin S$. Τότε, αν υπάρχει $S'_x \rightarrow S_x$ με $x \in S'_x$, ο κόμβος S δεν έχει κατευθυνόμενο μονοπάτι προς το S'_x διότι το G^C είναι άκυκλο από το Θεώρημα 2.7. Δηλαδή, σε κάθε βήμα εξετάσουμε N_i κόμβους τέτοιους ώστε $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq deg(x)$. Επομένως, $O(deg(x))$ χρόνο χρειαζόμαστε για το βήμα 2 και συνολικά $O(n)$ καθώς $deg(x) \leq n$.

Στη συνέχεια μελετάμε την ενημέρωση του clique separator, όταν το γράφημα $G - \{u, v\}$ είναι strongly chordal.

Βρίσκουμε μία κλίμα K που περιέχει και τον v_1 και τον v_2 και σταματάμε αν αυτή η κλίμα δεν είναι μοναδική. Έστω $N_1 = K - \{v_2\}$ και $N_2 = K - \{v_1\}$ και $\bar{S} = K - \{v_1, v_2\}$. Αν $|K| > 2$, τότε πήγαινε στην περίπτωση 1 ή στην περίπτωση 2 ή στην περίπτωση 3. Αν $|K| = 2$, τότε $\{v_1, v_2\}$ είναι μία γέφυρα, δηλαδή διαχωρίζει το G σε δύο συνδεδεμένα τμήματα G_1 και G_2 που περιέχουν τον v_1 και v_2 αντίστοιχα και κάνουμε το ακόλουθο για $i = 1$ και $i = 2$. Αν v_i είναι ο μόνος κόμβος στο G_i τότε προσθέτουμε τον κλίμα κόμβο N_i . Αλλιώς, αν το N_i βρεθεί δυο φορές στο $\mathcal{G}$, τότε καλούμε τις συνάρτηση $Remove(N_i)$.

Στο τέλος της διαδικασίας, διαγράφουμε την K και τις προσπίπτουσες σ'αυτή ακμές.

Περίπτωση 1: Η K είναι φύλλο με γείτονα τον S

Περίπτωση 1α: $v_1 \notin S$, $v_2 \notin S$ και $|K - S| = 2$. Τότε το $S = \bar{S}$. Προσθέτουμε τις κλίμας N_1, N_2 και τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{S, N_2\}$.

Περίπτωση 1β: $v_1 \notin S, v_2 \notin S$ και $|K - S| > 2$. Τότε το $S \subset \bar{S}$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$, τις ακμές $\{\bar{S}, N_1\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$ και το βέλος $(S, \bar{S})$.

Περίπτωση 1γ: $v_1 \in S, v_2 \notin S$ και $|K - S| > 1$. Τότε το $S \not\subset \bar{S}$ και $\bar{S} \not\subset S$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$ και τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{N_1, \bar{S}\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$. Για κάθε S' που είναι πρόγονος του S και περιέχει τον v_1 προσθέτουμε το βέλος $(S', \bar{S})$.

Περίπτωση 1δ: $v_1 \in S, v_2 \notin S$ και $|K - S| = 1$. Τότε $S = N_1 = \bar{S} \cup \{v_1\}$. Τότε ο $\bar{S}$ είναι ένας κόμβος του $\mathcal{G}$. αν και μόνο αν $(\bar{S}, S)$ είναι ένα βέλος στο $\mathcal{G}$. Κάνουμε την κατάλληλη περίπτωση.

Υποπερίπτωση 1: $\bar{S}$ είναι ένας κόμβος στο $\mathcal{G}$. Προσθέτουμε τον κλίκα κόμβο N_2 και την ακμή $\{\bar{S}, N_2\}$. Αν ο διαχωριστής S βρεθεί στο $\mathcal{G}$ δύο φορές, τότε καλούμε τη συνάρτηση $Remove(N_i)$.

Υποπερίπτωση 2: $\bar{S}$ δεν είναι ένας κόμβος στο $\mathcal{G}$. Προσθέτουμε τον κλίκα κόμβο N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$ και την ακμή $\{\bar{S}, N_2\}$. Για κάθε S' που είναι πρόγονος του S και περιέχει τον κόμβο v_1 , προσθέτουμε το βέλος $(S', \bar{S})$ και διαγράφουμε το (S', S) αν (S', S) είναι ένα βέλος στο $\mathcal{G}$. Αν ο S εμφανίζεται δύο φορές στο $\mathcal{G}$, τότε καλούμε την $Remove(S)$.

Περίπτωση 2: Η K είναι ένας εσωτερικός κόμβος με γείτονες S και S'

Περίπτωση 2α: $v_1 \notin S \cup S', v_2 \notin S \cup S'$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$, τις ακμές $\{N_1, \bar{S}\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$ και τα βέλη $(S, \bar{S})$, $(S', \bar{S})$.

Περίπτωση 2β: $v_1 \in S \cap S', v_2 \notin S \cup S'$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$ και τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{S', N_1\}$, $\{N_1, \bar{S}\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$.

Περίπτωση 2γ: $v_1 \in S - S', v_2 \notin S \cup S'$ και $|K - S'| > 2$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$, τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{N_1, \bar{S}\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$ και το βέλος $(S', \bar{S})$. Για κάθε S'' που είναι πρόγονος του S και περιέχει τον κόμβο v_1 , αν ο S'' δεν είναι ένας πρόγονος του S' τότε προσθέτουμε το βέλος (S'', S) .

Περίπτωση 2δ: $v_1 \in S - S', v_2 \notin S \cup S'$ και $|K - S'| = 2$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 και τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{N_1, S'\}$, $\{S', N_2\}$.

Περίπτωση 2ε: $v_1 \in S - S', v_2 \in S' - S$ και $|K - (S \cup S')| > 0$. Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$ και τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{N_1, \bar{S}\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$, $\{N_2, S'\}$. Βρίσκουμε τους προγόνους του S που περιέχουν τον κόμβο v_1 , έστω $\mathcal{S}$ και τους προγόνους του S' που περιέχουν τον κόμβο v_2 , έστω $\mathcal{S}'$. Για κάθε $S'' \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$, προσθέτουμε το βέλος $(S'', \bar{S})$.

Περίπτωση 2στ: $v_1 \in S - S'$, $v_2 \in S' - S$ και $|K - (S \cup S')| = 0$. Αν $|S' - S| = 1$ τότε έπεται ότι το $\bar{S}$ είναι ένας κόμβος στο $\mathcal{G}$ αν και μόνο αν $(\bar{S}, S)$ είναι ένα βέλος στο $\mathcal{G}$. Αν $|S - S'| = 1$ τότε έπεται ότι το $\bar{S}$ είναι ένας κόμβος στο $\mathcal{G}$ αν και μόνο αν $(\bar{S}, S')$ είναι ένα βέλος στο $\mathcal{G}$. Αν $|S' - S| > 1$ και $|S - S'| > 1$, τότε $\bar{S}$ δεν είναι ένας κόμβος του $\mathcal{G}$. Αν $\bar{S}$ δεν είναι ένας κόμβος στο $\mathcal{G}$, τότε προσθέτουμε το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$ και αν $\bar{S} \subset S$ και/ή $\bar{S} \subset S'$, τότε προσθέτουμε το βέλος $(\bar{S}, S)$ και/ή $(\bar{S}, S')$, αντίστοιχα. Αν $|S' - S| > 1$, τότε προσθέτουμε τον κλίκα κόμβο N_1 και τις ακμές $\{S, N_1\}$, $\{N_1, \bar{S}\}$ και αν $|S' - S| = 1$ και ο S υπάρχει στο $\mathcal{G}$ δύο φορές, τότε καλούμε τη συνάρτηση $Remove(S)$. Πράττουμε συμμετρικά με το $|S - S'|$.

Περίπτωση 3: Η K δεν έχει γείτονες

Προσθέτουμε τις κλίκες N_1, N_2 , το διαχωριστή κόμβο $\bar{S}$ και τις ακμές $\{N_1, \bar{S}\}$, $\{\bar{S}, N_2\}$.

$Remove(S)$:

Διαγράφουμε τον S και τις προσπίπτουσες σ' αυτόν ακμές και βέλη. Για κάθε παλιό ενδιάμεσο πρόγονο S^p του S , κάνουμε τα παρακάτω. Μαρκάρουμε τους απογόνους του S^p . Για κάθε παλιό ενδιάμεσο απόγονο S^s του S που δεν είναι μαρκαρισμένος, προσθέτουμε το βέλος (S^p, S^s) . Για κάθε παλιό γείτονα $K' \neq K$ του S που δεν είναι μαρκαρισμένος, προσθέτουμε την ακμή $\{S^p, K'\}$. Ξεμαρκάρουμε τους απογόνους του S^p .

Τέλος $Remove(S)$.

Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για τη διαγραφή ακμής (x, y) σε strongly chordal γράφημα είναι $O(n)$ που απαιτείται για να αναγνωρίσουμε αν το γράφημα είναι chordal. Με αυτή τη διαδικασία έχουμε μαρκάρει τη μοναδική κλίκα που περιέχει τους x και y . Στον δικό μας αλγόριθμο μένει να ελέγξουμε αν ο x ή ο y είναι guard, άρα αρκεί να μετρήσουμε πόσες φορές εμφανίζεται καθένας από αυτούς στην γειτονιά της κλίκας K_{xy} . Τόσο ο x όσο και ο y μπορούν να εμφανιστούν μέχρι n φορές (όσοι και οι κόμβοι του γραφήματος). Άρα, αυτή η αναζήτηση θα μας πάρει $O(n)$ χρόνο. Ακόμα η διαγραφή ακμής $;$] κοστίζει $O(n \log n)$ χρόνο. Συνεπώς, συνολικά χρειαζόμαστε $O(n)$ χρόνο για να ελέγξουμε τη διαγραφή ακμής σε strongly chordal γράφημα και $O(n \log n)$ χρόνο για να ανανεώσουμε τη δομή αναπαράστασης.

Θεώρημα 4.4. Έστω G strongly chordal και έστω $\{u, v\} \in E(G)$. Υπάρχει αλγόριθμος που αναγνωρίζει αν το $G - uv$ είναι strongly chordal και τρέχει σε $O(n)$ χρόνο. Επίσης, αν το $G - uv$ είναι strongly chordal, τότε ενημερώνει κατάλληλα την δομή αναπαράστασης σε $O(n \log n)$ χρόνο.

Κεφάλαιο 4.

4.2. Διαγραφή ακμής σε strongly chordal γραφήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

5.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε την κλάση των ισχυρά χορδικών γραφημάτων (strongly chordal graphs) που αποτελεί υποκλάση των γνωστών χορδικών γραφημάτων και υπερκλάση των τμηματικών γραφημάτων (interval graphs). Μελετήσαμε τις αναπαραστάσεις αυτών των κλάσεων γραφημάτων και δημιουργήσαμε μία νέα αναπαράσταση για τα ισχυρά χορδικά γραφήματα, βασιζόμενοι σε κάποια ήδη υπάρχουσα αναπαράσταση των χορδικών γραφημάτων.

Επίσης, δώσαμε έναν νέο δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης που τρέχει σε $O(n)$ χρόνο για να αναγνωρίσει αν ένα ισχυρά χορδικό γράφημα με n κορυφές και m ακμές παραμένει ισχυρά χορδικό μετά την διαγραφή κάποιας ακμής. Επίσης αν το γράφημα που προκύπτει μετά την διαγραφή ακμής παραμένει ισχυρά χορδικό τότε ο αλγόριθμος σε χρόνο $O(n \log n)$ ενημερώνει κατάλληλα την αναπαράσταση του γραφήματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο αλγόριθμος που παρουσιάσαμε για την διαγραφή ακμής είναι ο πρώτος που έχει δοθεί από την σκοπιά των δυναμικών αλγορίθμων αναγνώρισης για την κλάση των ισχυρά χορδικών γραφημάτων και είναι σαφώς πιο γρήγορος από τους γνωστούς αλγορίθμους αναγνώρισης που δεν είναι δυναμικοί και εκτελούνται σε χρόνο $O(\min\{n^2, m \log n\})$.

5.2 Επεκτάσεις—Ανοιχτά προβλήματα

Υπάρχουν διάφορες επεκτάσεις που μπορεί να κινηθεί κανείς με βάση την παρούσα διατριβή. Παραθέτουμε ορισμένες από αυτές:

- 1) Όπως περιγράψαμε τον αλγόριθμο ενημέρωσης που δώσαμε στο Θεώρημα 4.4, αυτός εκτελείται σε $O(n \log n)$ χρόνο ενώ ο αλγόριθμος αναγνώρισης εκτελείται σε χρόνο $O(n)$. Για να πετύχουμε συνολικό χρόνο $O(n)$ θα πρέπει

επομένως να σχεδιάσουμε ταχύτερο αλγόριθμο για την ενημέρωση της δομής αναπαράστασης που να εκτελείται σε $O(n)$ χρόνο. Προς αυτή την κατεύθυνση θα πρέπει κανείς να αναλύσει περισσότερο τα βήματα που περιγράψαμε όταν εκτελείται η ενημέρωση της δομής.

- 2) Για να πετύχει κανείς έναν πλήρως δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης θα πρέπει να αντιμετωπίσει και την περίπτωση της εισαγωγής ακμής εκτός από την διαγραφή ακμής που ασχοληθήκαμε στην εργασία αυτή. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι αν το $G - xy$ δεν είναι strongly chordal, τότε μόνο $3 - sun$ μπορεί να εμφανιστεί στο $G - xy$. Ωστόσο, στην εισαγωγή ακμής μπορεί να προκύψει οποιοδήποτε $k - sun$, για $k \geq 3$ στο γράφημα $G + xy$.
- 3) Σε συνδυασμό με την προηγούμενη κατεύθυνση που περιγράψαμε, πέρα από την αντιμετώπιση της τροποποίησης ακμής (είτε ως διαγραφή είτε ως εισαγωγή) θα μπορούσε κανείς να μελετήσει και την εισαγωγή κορυφής σε ισχυρά χορδικό γράφημα. Όπως, και με την εισαγωγή ακμής έτσι και εδώ η δυσκολία φαίνεται να υπάρχει στην πιθανή δημιουργία οσοδήποτε μεγάλων $k - sun$ και όχι μόνο $3 - sun$.
- 4) Μια άλλη κατεύθυνση που σχετίζεται με την εργασία μας, είναι η ανάπτυξη και σχεδίαση δυναμικών αλγορίθμων αναγνώρισης σε άλλες κλάσεις γραφημάτων που σχετίζονται με τα strongly chordal γραφήματα, όπως τα bipartite permutation γραφήματα και τα chordal bipartite [3].
- 5) Ένα τελευταίο ανοικτό πρόβλημα που παραθέτουμε είναι σχετικά με αλγόριθμο αναγνώρισης των ισχυρά χορδικών γραφημάτων που εκτελείται όχι απαραίτητα σε δυναμικό περιβάλλον. Δεν είναι γνωστό κατά πόσο υπάρχει αλγόριθμος αναγνώρισης ισχυρά χορδικών γραφημάτων που να εκτελείται σε γραμμικό χρόνο, δηλαδή σε χρόνο $O(n + m)$, για ένα γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Αξίζει να σημειώσουμε ότι είναι ήδη γνωστοί γραμμικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης για όλες τις κλάσεις σχετικές με την κλάση των ισχυρά χορδικών γραφημάτων όπως για τα χορδικά γραφήματα (chordal graphs), για τα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) και τα γραφήματα διαμέρισης (split graphs).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Berry, A., Heggernes, P. and Villanger, Y. A vertex incremental approach for maintaining chordality. *Discrete Math.*, 306:318–336, 2006.
- [2] Booth, K. S. and Lueker, G.S. Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms. *J. Computer and System Sciences*, 13:335–379, 1976.
- [3] Brandstädt, A., Le, V.B. and Spinrad, J.P. Graph Classes: A Survey. In *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Monograph, Philadelphia, 1999.
- [4] Crespelle, C. Fully dynamic representations of interval graphs. In *35th Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Sciences*, volume 5911 of *WG 2009*, pages 77–87, 2009.
- [5] Farber, M. Characterizations of strongly chordal graphs. *Discrete Mathematics*, 43(2-3):173–189, 1983.
- [6] Földes, S. and Hammer, P.L. Split graphs. *Congressus Numerantium*, 19:311–315, 1977.
- [7] Fulkerson, D. R., Gross, O. A. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, 15:835–855, 1965.
- [8] Gavril, F. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *J. Combin Theory Ser. B.*, 16:47–56, 1974.
- [9] Gilmore P.C. and Hoffman A.J. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 16:539–548, 1964.

- [10] Golumbic, M.C. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, Vol.57 Elsevier B.V., 2004.
- [11] Heggernes, P. Treewidth, partial k -trees and chordal graphs. *Institutt for Informatikk*, 2006.
- [12] Heggernes, P. , Mancini, F. Dynamically maintaining split graphs. *Discrete App. Math.*, 157:2057–2069, 2009.
- [13] Heggernes, P. , Mancini, F. , Papadopoulos, C. , Sritharan, R. *Strongly chordal and chordal bipartite graphs are sandwich monotone*. Springer Science and Business Media, LLC, 2010.
- [14] Ibarra, L. Fully dynamic algorithms for chordal graphs and split graphs. *ACM trans. Algorithms* 4, 40, 2008.
- [15] Ibarra, L. The clique separator graph for chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(8):1737–1749, 2009.
- [16] Ibarra, L. A fully dynamic graph algorithm for recognizing interval graphs. *Algorithmica*, 58:637–678, 2010.
- [17] Lozin, V. Graph Theory Notes.
- [18] McKee, T.A. and McMorris, F.R. Topics in Intersection Graph Theory. In *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Monograph, Philadelphia, 1999.
- [19] Nevries, R. and Rosenke, C. Characterizing and Computing the structure of Clique Intersections in Strongly Chordal Graphs. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, WG 2013, LNCS 8165, pages 382–393, 2013.
- [20] Paige, R. and Tarjan, R.E. Three partition refinement algorithm.
- [21] Rose, D. J., Tarjan, R. E. and Lueker, G. S. . Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. *SIAM J. Computing*, 5(2):266–283, 1976.
- [22] Shamir, R. and Sharan R. A fully dynamic algorithm for modular decomposition and recognition of cographs.
- [23] Spinrad, J.P. Doubly lexical ordering of dense 0-1 matrices.
- [24] Tarjan, R.E. and Yannakakis M. Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. *SIAM Journal on Computing*, 13:566–579, 1984.